Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Restricciones cognitivas en el estudio de la función en un aula de diversificación de 3º de E.S.O.

Jon Arraiza Inza

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar las restricciones cognitivas en el estudio de la función en un aula de 3º de la Educación Secundaria Obligatoria de diversificación.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y de los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre las funciones, que se ha puesto en marcha en un aula de 3º de la Educación Secundaria Obligatoria de diversificación en el marco del Practicum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I:

Las funciones en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las funciones en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran, en forma de tabla, los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a las funciones en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades tipo (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) propuestas en un libro de texto de 3º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

Las funciones en el currículo vigente

En este capítulo se presentan los contenidos de las funciones marcados por el currículo vigente publicado en el Boletín Oficial del Estado en cada uno de los ciclos educativos. Para realizar este trabajo se han escogido 6 descriptores diferentes.

1.1. Contenido en Educación Primaria

3er Ciclo Primaria	
Descriptor	**Contenido**
Aplicación a situaciones y casos reales	--
Álgebra	- Números enteros: Ordenación de números enteros, de decimales y de fracciones por comparación y representación gráfica. *Bloque 1, Números y operaciones.* - Longitud, peso, capacidad y superficie: Equivalencias entre unidades de una misma magnitud. *Bloque 2, La medida: estimación y cálculo de magnitudes.* En la educación primaria no se utilizará el álgebra directamente, sino que se estudiarán conceptos aritméticos generalizados en los cuales se utilizan símbolos para referirse a cantidades desconocidas.
Geometría	- La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros: Sistema de coordenadas cartesianas, descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros y la representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas. *Bloque 3, Geometría.*
Representación gráfica: Tabla de valores y gráficas.	- Obtención y utilización de información para la realización de gráficos. *Bloque 4, Tratamiento de la información, azar y probabilidad*.
Análisis de funciones	--
Uso Tecnologías	--

Tabla 1-1. Contenidos en el tercer ciclo de Educación Primaria.

1.2. Contenido en Educación Secundaria Obligatoria

1er Ciclo Secundaria		
Descriptor	**Contenido 1º ESO**	**Contenido 2º ESO**
Aplicación a situaciones y casos reales	- Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa. *Bloque 2, Números.* - Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa, valorando la precisión y simplicidad. *Bloque 3, Álgebra.* - Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*	- Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa. *Bloque 2, Números.* - Interpretación de la constante de proporcionalidad y aplicación a situaciones reales. *Bloque 5, Funciones y gráficas.* - Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*
Álgebra	- Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas. *Bloque 3, Álgebra.*	- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones y para la obtención del valor numérico de una expresión *Bloque 3, Álgebra.*
Geometría	- Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad. Empleo de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano. *Bloque 4, Geometría.*	- Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. *Bloque 4, Geometría.*
Representación gráfica: Tabla de valores y gráficas	- Organización de datos en tablas de valores y Representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. *Bloque 5, Funciones y gráficas.* - Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica. Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*	- Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. *Bloque 5, Funciones y gráficas.* - Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*
Análisis de funciones	- Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. . *Bloque 5, Funciones y gráficas.*	- Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. *Bloque 5, Funciones y gráficas.* - Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*

Descriptor	Contenido 1º ESO	Contenido 2º ESO
Uso Tecnologías	- Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. *Bloque 1, Contenidos comunes.*	- Utilización de herramientas tecnológicas, calculadoras gráficas y programas de ordenador para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales, la comprensión de propiedades geométricas y la construcción e interpretación de gráficas. *Bloques 1 y 5, Contenidos comunes y Funciones y gráficas*

Tabla 1-2. Contenidos en el primer ciclo de Educación Secundaria.

2º Ciclo Secundaria	
Descriptor	**Contenido 3º ESO**
Aplicación a situaciones y casos reales	- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana. *Bloque 3, Álgebra.* - Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. *Bloque 5, Funciones y gráficas.* - Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*
Álgebra	- Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico, transformación de expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Bloque 3, Álgebra.*
Geometría	- Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. *Bloque 4, Geometría.*
Representación gráfica: Tabla de valores y gráficas	- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*
Análisis de funciones	- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. *Bloque 5, Funciones y gráficas.* - Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*
Uso Tecnologías	- Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. *Bloque 1, Contenidos comunes.* - Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*

Tabla 1-3. Contenidos en 3º ESO.

2º Ciclo Secundaria		
Descriptor	**Contenido 4º ESO Ciencias y Tecnología**	**Contenido 4º ESO Ciencias Sociales**
Aplicación a situaciones y casos reales	- Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. *Bloque 3, Álgebra.* - Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales. *Bloque 5, Funciones y gráficas.* - Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*	- Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. *Bloque 2, Números.* - Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. *Bloque 3, Álgebra.* - Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*
Álgebra	- Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones y de inecuaciones. *Bloque 3, Álgebra*	- Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. *Bloque 3, Álgebra*
Geometría	--	--
Representación gráfica: Tabla de valores y gráficas	- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales. *Bloque 5, Funciones y gráficas*	- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*
Análisis de funciones	- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados y funciones definidas a trozos *Bloque 5, Funciones y gráficas*. - Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. *Bloque 5, Funciones y gráficas*	- Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. *Bloque 5, Funciones y gráficas.*
Uso Tecnologías	- Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. *Bloque 1, Contenidos comunes.* - Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos. *Bloque 3, Álgebra*	- Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas. *Bloque 1, Contenidos comunes.* - Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos. *Bloque 3, Álgebra*

Tabla 1-4. Contenidos en 4º ESO.

1.3. Contenido en Bachillerato

Bachillerato Ciencias y Tecnología		
Descriptor	**Contenido 1º Bachillerato**	**Contenido 2º Bachillerato**
Aplicación a situaciones y casos reales	- Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales. *Bloque 3, Análisis.*	- Problemas de optimización. *Bloque 3, Análisis.*
Álgebra	--	--
Geometría	- Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas. *Bloque 2, Geometría.*	- Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. *Bloque 2, Geometría.* - Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto. *Bloque 3, Análisis*
Representación gráfica: Tabla de valores y gráficas	--	--
Análisis de funciones	- Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. *Bloque 3, Análisis.* - Dominio, recorrido y extremos de una función. *Bloque 3, Análisis.* - Operaciones y composición de funciones. *Bloque 3, Análisis.* - Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad. *Bloque 3, Análisis.* - Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo. *Bloque 3, Análisis.*	- Concepto de límite de una función. Cálculo de límites. *Bloque 3, Análisis* - Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad. *Bloque 3, Análisis* - Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto. *Bloque 3, Análisis* - Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. *Bloque 3, Análisis* - Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas. *Bloque 3, Análisis*
Uso Tecnologías	--	--

Tabla 1-5. Contenidos en Bachillerato, modalidad de Ciencias y Tecnología.

Bachillerato Ciencias Sociales		
Descriptor	**Contenido 1º Bachillerato**	**Contenido 2º Bachillerato**
Aplicación a situaciones y casos reales	--	Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Programación lineal. Aplicaciones a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos. Interpretación de las soluciones. Bloque 1, álgebra.
Funciones: Álgebra	--	--
Funciones: Geometría	--	- Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica. *Bloque 2, Análisis.*
Representación gráfica: Tabla de valores y gráficas	Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. Aspectos globales de una función. *Bloque 2, Análisis.*	--
Análisis de funciones	- Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. - Las funciones definidas a trozos. Tasa de variación. Tendencias. *Bloque 2, Análisis.*	- Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función. Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información. *Bloque 2, Análisis.* - Aplicación de las derivadas al estudio de las propiedades locales de funciones habituales. *Bloque 2, Análisis.* - Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales. *Bloque 2, Análisis.*
Uso Tecnologías	--	--

Tabla 1-6. Contenidos en Bachillerato, modalidad de Ciencias Sociales.

En la tabla anterior se detallan los contenidos del currículo vigente en relación a las funciones. Es interesante observar cuáles son los que guardan continuidad a lo largo del currículo.

La tabla está dividida en 6 descriptores diferentes. Por lo tanto a continuación se analiza cada uno de ellos.

En el primer descriptor, aplicación de las funciones a casos reales, se diferencian tres etapas diferentes, que coinciden con los tres apartados del capítulo, Educación Primaria, Educación Secundaria y Bachillerato. Es cierto que en este descriptor pueden aparecer contenidos referidos a cualquiera de los otros descriptores como álgebra, geometría, etc., pero como se le da una importancia considerable a la aplicación de las funciones a situaciones reales de la vida cotidiana, se considera oportuno diferenciarlo.

En el tercer ciclo de la Educación Primaria únicamente se realizan pequeñas aplicaciones de casos reales relacionados con las estrategias de cálculo. Este contenido no está directamente relacionado con el concepto de la función, sino que se están facilitando unas nociones previas para, posteriormente, poder estudiar las funciones.

En la Educación Secundaria sí que se puede observar que el descriptor tiene una mayor presencia en el estudio de la función, y por lo tanto, en cierta medida, este concepto se estudiará a través de situaciones reales:

- Interpretación de la relación de proporción directa (a partir del primer curso)
- Proporción inversa (a partir del segundo)
- Interpretación de gráficas como la relación de dos magnitudes (a partir del segundo curso)
- Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones (se inician a partir del tercer curso, incrementándose la dificultad en cuarto, incluyendo más incógnitas y en Bachillerato se añadirán las inecuaciones)

En Bachillerato hay una aplicación a situaciones resales más específica: Problemas de optimización, aplicaciones a la resolución de problemas sociales, económicos y demográfico, etc.

En el siguiente descriptor "Geometría", se observa que lo que el currículo describe es diferente en cada curso. No se aprecia continuidad en los conceptos descritos a lo largo de los diferentes cursos. En cierta manera, se utiliza la geometría como una herramienta más para lograr la adquisición de los conceptos propios de la función requeridos en cada curso. Se aprecia que en la educación secundaria se le da una mayor importancia al álgebra que a la geometría, y en caso de utilizar la geometría se hace para tratar con conceptos algebraicos como fórmulas de superficies, Pitágoras, etc.

El currículo deja claro también cuales son las tecnologías que se deben utilizar en el estudio de la función. Incluso en algún curso se marca cual o cuales utilizar para el estudio de un concepto. También existe a lo largo de toda la Educación Secundaria un contenido común para todos los cursos, "Utilización de herramientas tecnológicas".

Capítulo 2. Los criterios de evaluación de las funciones en el currículo vigente

Una vez analizados los contenidos en el currículo vigente, se van a exponer cuales son los criterios de evaluación que se marcan para esos contenidos en dicho currículo.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

3er Ciclo Primaria	
Descriptor	**Criterios de evaluación**
Aplicación a situaciones y casos reales	*Utilizar los números decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana.* Con este criterio se pretende comprobar la utilización de los diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, y la capacidad de identificarlos y utilizarlos como operadores en la interpretación y la resolución de problemas.
Álgebra	*Leer, escribir y ordenar, utilizando razonamientos apropiados, distintos tipos de números (naturales, enteros, fracciones y decimales hasta las centésimas).* Con este criterio se pretende comprobar el manejo, en situaciones tomadas de la vida real, de diferentes tipos de números, interpretando su valor y siendo capaces de comparar e intercalar números escritos de diferentes maneras.
Geometría	*Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana.* En este criterio es importante detectar que los estudiantes han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información. Se evaluará si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas.
Repr. gráfica: Tabla valores	*Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares.* Este criterio pretende evaluar el desarrollo de capacidades espaciales en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y, en ciertos casos, ejes de coordenadas, mediante representaciones de espacios familiares.
Análisis de funciones	--

Tabla 2-1. Criterios de evaluación en el tercer ciclo de Educación Primaria.

2.2. Criterios de evaluación en Educación Secundaria Obligatoria

1er Ciclo Secundaria		
Descriptor	**Criterios de evaluación 1º ESO**	**Criterios de evaluación 2º ESO**
Aplicación a situaciones y casos reales	*Identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.* Este criterio pretende valorar la capacidad de identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana, la relación de dependencia entre ellas y visualizarla gráficamente.	*Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.* Se pretende comprobar la capacidad de identificar, en diferentes contextos, una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes.

Descriptor	Criterios de evaluación 1º ESO	Criterios de evaluación 2º ESO
Álgebra	*Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas.* Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos y, cuando sea posible, expresar algebraicamente la regularidad percibida. Se pretende, asimismo, valorar el uso del signo igual como asignador y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones. Forma parte de este criterio también la obtención del valor numérico en fórmulas simples con una sola letra.	*Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.* Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones, así como plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Asimismo se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.
Geometría	*Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas.* Se pretende evaluar la experiencia adquirida en la utilización de diferentes elementos y formas geométricas.	--
Repr. gráfica: Tabla valores	*Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas.* Se trata de evaluar, además, el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes , así como la capacidad para interpretar de forma cualitativa la información presentada en forma de tablas y gráficas.	*Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado.* Este criterio pretende valorar el manejo de los mecanismos que relacionan los distintos tipos de presentación de la información, en especial el paso de la gráfica correspondiente a una relación de proporcionalidad a cualquiera de los otros tres: verbal, numérico o algebraico.
Análisis de funciones	--	--

Tabla 2-2. Criterios de evaluación en el primer ciclo de Educación Secundaria.

2º Ciclo Secundaria	
Descriptor	**Criterios de evaluación 3º ESO**
Aplicación a situaciones y casos reales	*Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.* Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer de ese modo la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.

Descriptor	Criterios de evaluación 3º ESO
Álgebra	*Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos, mediante el uso adecuado de los recursos tecnológicos.
Geometría	*Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias Composiciones.* Con este criterio se pretende valorar la comprensión de los movimientos en el plano, para que puedan ser utilizados como un recurso más de análisis en una formación natural. El reconocimiento de los movimientos lleva consigo la identificación de sus elementos característicos: ejes de simetría, centro y amplitud de giro, etc. Igualmente los lugares geométricos se reconocerán por sus propiedades, no por su expresión algebraica.
Repr. gráfica: Tabla valores	*Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.* Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer de ese modo la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.
Análisis de funciones	--

Tabla 2-3. Criterios de evaluación en 3º de ESO.

2º Ciclo Secundaria		
Descriptor	**Criterios de evaluación 4º ESO Ciencias y Tecnología**	**Criterios de evaluación 4º ESO Ciencias Sociales**
Aplicación a situaciones y casos reales	--	*Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* Este criterio va dirigido a comprobar que el alumno está preparado para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente en forma de ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución.
Álgebra	*Analizar situaciones y matemáticas utilizando símbolos y métodos algebraicos para resolver problemas.* Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad de usar el álgebra simbólica explicar relaciones matemáticas y utilizar sus métodos en la resolución de inecuaciones, ecuaciones y sistemas.	Los criterios de evaluación utilizados para este descriptor serán los mismos que los comentados para el descriptor anterior. Ya que se utiliza el criterio para evaluar el álgebra en situaciones cotidianas

Descriptor	Criterios de evaluación 4º ESO Ciencias y Tecnología	Criterios de evaluación 4º ESO Ciencias Sociales
Geometría	--	--
Repr. gráfica: Tabla valores	--	--
Análisis de funciones	*Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.* Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo, de entre los estudiados: lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde a un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado.	*Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento.* A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.

Tabla 2-4. Criterios de evaluación en 4º de ESO.

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

Bachillerato Ciencias y Tecnología		
Descriptor	**Criterios de evaluación 1º Bachillerato**	**Criterios de evaluación 2º Bachillerato**
Aplicación a situaciones y casos reales	*Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos.* Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global.	*Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización.* Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones.

Descriptor	Criterios de evaluación 1º Bachillerato	Criterios de evaluación 2º Bachillerato
Álgebra	*Utilizar correctamente los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información; estimar los efectos de las operaciones sobre los números reales y sus representaciones gráfica y algebraica y resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos.* También se debe valorar la capacidad para traducir algebraicamente una situación y llegar a su resolución, haciendo una interpretación de los resultados obtenidos.	*Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto.* Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.
Geometría	*Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real; así como, identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano y analizar sus propiedades métricas.* Se pretende evaluar la capacidad para representar geométricamente una situación planteada, eligiendo las definiciones y transformaciones geométricas que permitan interpretar las soluciones encontradas.	*Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en tres dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones.* La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el espacio de tres dimensiones.
Repr. gráfica: Tabla valores	--	--
Análisis de funciones	*Utilizar los procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente.* Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante	*Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita.* Se pretende comprobar con este criterio que los alumnos son capaces de utilizar los conceptos básicos del análisis y que han adquirido el conocimiento de la terminología adecuada y los aplican adecuadamente al estudio de una función concreta.

Tabla 2-5. Criterios de evaluación en Bachillerato, modalidad de Ciencias y Tecnología.

Bachillerato Ciencias Sociales		
Descriptor	**Criterios de evaluación 1º Bachillerato**	**Criterios de evaluación 2º Bachillerato**
Aplicación a situaciones y casos reales	*Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas.* Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas.	*Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características.* Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir al lenguaje de las funciones determinados aspectos de las ciencias sociales y para extraer, de esta interpretación matemática, información que permita analizar con criterios de objetividad el fenómeno estudiado y posibilitar un análisis crítico a partir del estudio de las propiedades globales y locales de la función.
Álgebra	*Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas.* Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir algebraica o gráficamente una situación y llegar a su resolución haciendo una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos, más allá de la resolución mecánica de ejercicios que sólo necesiten la aplicación inmediata de una fórmula, un algoritmo o un procedimiento determinado.	*Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, ecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.* Este criterio está dirigido a comprobar la capacidad de utilizar con eficacia el lenguaje algebraico tanto para plantear un problema como para resolverlo, aplicando las técnicas adecuadas. No se trata de valorar la destreza a la hora de resolver de forma mecánica ejercicios de aplicación inmediata, sino de medir la competencia para seleccionar las estrategias y herramientas algebraicas; así como la capacidad de interpretar críticamente el significado de las soluciones obtenidas.
Geometría	--	--
Repr. gráfica: Tabla valores	--	--
Análisis de funciones	*Utilizar las tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos*	*Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una*

Descriptor	Criterios de evaluación 1º Bachillerato	Criterios de evaluación 2º Bachillerato
Análisis de funciones	*sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica, propiciando la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos.* Este criterio está relacionado con el manejo de datos numéricos y de relaciones no expresadas en forma algebraica. Comprueba la capacidad para ajustar a una función conocida los datos extraídos de experimentos concretos y obtener información suplementaria mediante técnicas numéricas.	*función y resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social.* Este criterio no pretende medir la habilidad de los alumnos en complejos cálculos de funciones derivadas, sino valorar su capacidad para utilizar la información que proporciona su cálculo y su destreza a la hora de emplear los recursos a su alcance para determinar relaciones y restricciones en forma algebraica, detectar valores extremos, resolver problemas de optimización y extraer conclusiones

Tabla 2-6. Criterios de evaluación en Bachillerato, modalidad de Ciencias Sociales.

Capítulo 3.
Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en los libros de texto en el estudio de la función

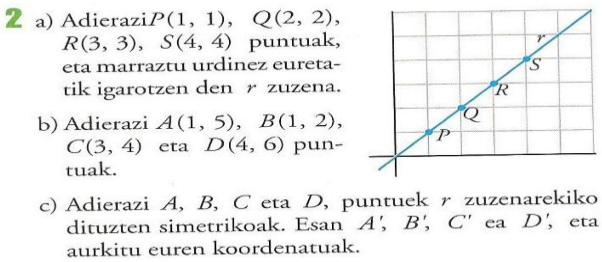
En este tercer capítulo se muestran varios tipos de ejercicios, problemas y cuestiones tipo en relación al tema de las funciones. Estos han sido extraídos de libros de texto de 1º ESO a 1º Bachillerato (en el apartado de "Referencias" se pueden consultar los títulos de los diferentes libros de texto).

3.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º ESO

Actividad Tipo: Ejercicio.

Descripción: Este ejercicio tiene como objetivo principal que el alumno trabaje con el sistema de coordenadas cartesianas. La parte a) da la solución, lo que ayuda al alumno a resolver todos los apartados de forma correcta. Además, los dos últimos proponen trabajar con el concepto de simetría.

Ejemplo:


2 a) Adierazi $P(1, 1)$, $Q(2, 2)$, $R(3, 3)$, $S(4, 4)$ puntuak, eta marraztu urdinez eureta-tik igarotzen den r zuzena.

b) Adierazi $A(1, 5)$, $B(1, 2)$, $C(3, 4)$ eta $D(4, 6)$ puntuak.

c) Adierazi A, B, C eta D, puntuek r zuzenarekiko dituzten simetrikoak. Esan A', B', C' ea D', eta aurkitu euren koordenatuak.

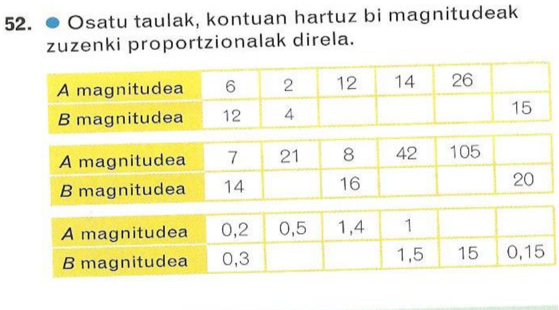
Figura 3-1. Colera, Gaztelu; 2007 a, 258.

Traducción:
a) "Indica los puntos P (1,1), Q (2,2), R (3,3), S (4,4), pinta de azul la recta r que pasa por ellos".
b) "Indica los puntos A (1,5), B (1,2), C (3,4), D (4,6)".
c) "Indica los puntos simétricos de A, B, C y D con respecto a la recta r. Encontrar las coordenadas."

Actividad Tipo: Ejercicio.

Descripción: Ejercicio para trabajar con el concepto de proporcionalidad. Utilizando una tabla de valores para la expresión las funciones. Esto es desconocido para los alumnos pero así se van iniciando el proceso de estudio de las funciones.

Ejemplo:


52. Osatu taulak, kontuan hartuz bi magnitudeak zuzenki proportzionalak direla.

A magnitudea	6	2	12	14	26	
B magnitudea	12	4				15

A magnitudea	7	21	8	42	105	
B magnitudea	14		16			20

A magnitudea	0,2	0,5	1,4	1		
B magnitudea	0,3			1,5	15	0,15

Figura 3-2. Redalen, Santxo; 2007, 163.

Traducción:
"Completa las tabla, teniendo en cuenta que las dos magnitudes son directamente proporcionales."

Actividad Tipo: Problema.

Descripción: Se trabaja la proporcionalidad directa en un problema contextualizado.

Ejemplo:

56. ●● Taulan, espazio-neurriak eta haiek egiteko behar diren denborak ageri dira.

Espazioa (m)	120	30	60	*b*
Denbora (s)	9	2,25	*a*	6

a) Magnitude zuzenki proportzionalak al dira?

b) Kalkulatu espazioaren eta denboraren arteko proportzionaltasun-konstantea.

c) Kalkulatu falta diren balioak.

Figura 3-3. Redalen, Santxo; 2007, 164.

Traducción:

"En la tabla, aparecen valores de espacio y el tiempo requerido para realizarlos.

a) ¿Son directamente proporcionales las magnitudes?
b) Calcula la razón.
c) Calcula los valores desconocidos."

En ninguno de los libros de texto de 1º de ESO se encuentra un tema de funciones definido como tal. Para encontrar los contenidos respectivos a este tema se debe realizar un repaso al temario. En algunos se tratan aspectos concretos de las funciones o conceptos previos para que en cursos posteriores se pueda realizar el aprendizaje del tema de funciones.

En los ejemplos que se señalan en los cuadros anteriores, se muestran dos ejercicios y un problema de 1º de ESO.

Hay que destacar que el primero de ellos se encuentra en un libro de texto de 1º de la ESO, pero también se pueden encontrar ejercicios semejantes en el libro de texto de 2º de la ESO, en la iniciación del tema de funciones a modo de repaso.

Los otros dos ejemplos tratan el concepto de proporcionalidad. Se ven dos maneras diferentes de ejercitar los contenidos. Uno de ellos es un ejercicio descontextualizado y el otro es un problema donde se asocia el concepto con una situación real. Este tipo de ejercicios también aparecen en libros de texto de 2º de la ESO, aunque aparecen dentro de un tema concreto para las funciones.

3.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º ESO

Actividad Tipo: Cuestión.

Descripción: Este ejercicio se utiliza para trabajar el concepto de función. Los alumnos deben identificar aquellos gráficos donde para cada valor de x, y únicamente toma un valor. En este caso el gráfico coincidirá con una función.

Ejemplo:

1 Esan honako grafiko hauetako zein dagozkien funtzioei, eta zein ez diren funtzioenak, erantzunak justifikatuz:

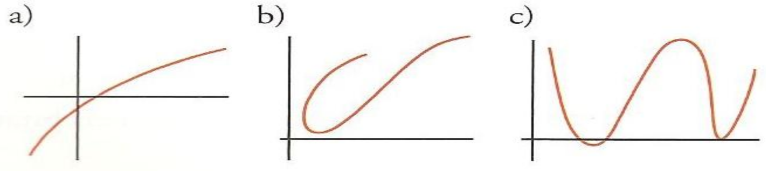


Figura 3-4. Colera, Gaztelu; 2007 b, 222.

Traducción:
“Di cuales de los siguientes gráficos coinciden con funciones y cuales no justificando tu respuesta.”.

Actividad Tipo: Ejercicio.

Descripción: Se deben representar las funciones que marca el enunciado. Si nos fijamos, todas las funciones son lineales, del tipo y = mx + k. Para ello previamente se ha trabajado con funciones proporcionales (y = mx) y funciones afines (y = k).

Ejemplo:

1 Adierazi honako funtzio hauek:

a) $y = -2x + 5$

b) $y = x - 3$

c) $y = \frac{2}{3}x - 4$

d) $y = \frac{3}{2}x + 4$

e) $y = -x - 1$

f) $y = x - 6$

g) $y = \frac{3}{5}x + 1$

h) $y = -\frac{5}{3}x + 1$

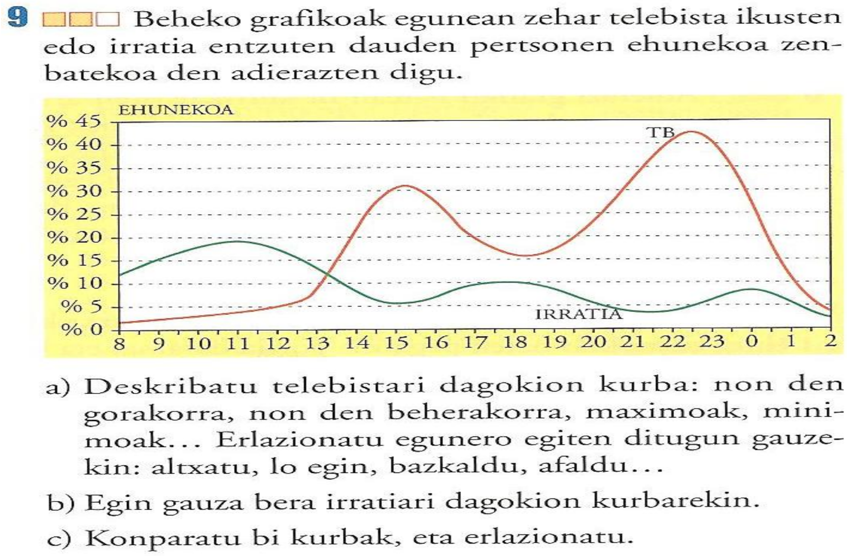
Figura 3-5. Colera, Gaztelu; 2007 b, 231.

Traducción:
“Representa las siguientes funciones”.

Actividad Tipo: Problema.

Descripción: En este ejercicio se contemplan dos objetivos. Por un lado realizar la interpretación de la relación entre las dos variables de una función. Y por otro lado, dominar los conceptos de función creciente y función decreciente.

Ejemplo:



9 Beheko grafikoak egunean zehar telebista ikusten edo irratia entzuten dauden pertsonen ehunekoa zenbatekoa den adierazten digu.

a) Deskribatu telebistari dagokion kurba: non den gorakorra, non den beherakorra, maximoak, minimoak... Erlazionatu egunero egiten ditugun gauzekin: altxatu, lo egin, bazkaldu, afaldu...

b) Egin gauza bera irratiari dagokion kurbarekin.

c) Konparatu bi kurbak, eta erlazionatu.

Figura 3-6. Colera, Gaztelu; 2007 b, 234.

Traducción:

"El gráfico de abajo representa los porcentajes respectivos a la gente que está viendo la tele o escuchando la radio a lo largo del día.

a) Describe la curva correspondiente a la tele: donde es creciente, donde es decreciente, máximos, mínimos,…Relaciona esto con las cosas que hacemos diariamente: Levantarse, dormir, comer, cenar,…
b) Realiza el mismo ejercicio pero ahora con la radio.
c) Compara las dos curvas y relaciónalas".

Una cuestión, un ejercicio y un problema son los casos que se han escogido para explorar los libros de texto de 2º de la ESO. Es cierto que se han encontrado ejercicios muy similares a los presentados en el apartado anterior (Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de la ESO) a modo de repaso o introduciendo contenidos nuevos relacionados.

La primera cuestión expuesta trata sobre el concepto de función. Es una cuestión práctica importante ya que el mismo ejercicio aparece en el libro de texto de 3º de la ESO y también en los dos libros de texto de las dos especialidades de 4º de la ESO. En Bachillerato también se trabaja con el concepto de función, pero no encontramos este tipo de ejercicio.

El segundo ejercicio adjunto en este apartado es uno de los ejercicios más frecuentes en el tema de funciones de los libros de texto de matemáticas de secundaria. Con lo cual es obvio que va a aparecer de una forma recurrente en posteriores cursos, pero incrementando la dificultad o concretamente representando otro tipo de funciones.

En 4º de la ESO aparecen las funciones cuadráticas, funciones de proporcionalidad inversa, funciones con raíces y exponenciales (en ambas opciones).
En Bachillerato también encontramos este ejercicio pero se añaden funciones polinómicas, racionales, con radicales, logarítmicas, trigonométricas, etc.

El último de los ejemplos es un ejercicio contextualizado de interpretación de diferentes características de la función. Ejercicios de interpretación de funciones se pueden encontrar a lo largo de todos los cursos en los que se estudian las funciones ya que, tal y como se ha visto en el estudio del currículo, se le da mucha importancia a la práctica de las funciones en casos prácticos reales. En cuanto a los conceptos de función creciente y decreciente, es en 2º de la ESO cuando se comienzan a usar estos conceptos, pero a partir de aquí serán muy utilizados, aunque siempre añadiendo dificultad y nuevas nociones relacionadas: Tasa de variación media, etc.

3.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º ESO

Actividad Tipo: Problema.

Descripción: En 3º de la ESO se comienza a trabajar con las nociones de tendencia y de periodicidad. Aquí se describe un problema propio del concepto de periodicidad de una función.

Ejemplo:

1 Ama bat semea zaldiko-maldikoetan zelan dabilen begira ari da. 30 s irauten duen bira bakoitzean, ia ukitzeraino hurbiltzen dira (2 m) eta 24 m-raino urruntzen dira.
Adierazi ardatzetan funtzio hau:

denbora → *distantzia*

Horretarako, hartu honako eskala hauek:

— *X* ardatza: 1 laukitxo = 5 segundo

— *Y* ardatza: 1 laukitxo = 2 metro

Adierazi 4 birari dagokien tartea.

Figura 3-7. Colera, Gaztelu; 2007 c, 148.

Traducción:
"Una madre mira a su hijo como monta en un tiovivo. En cada vuelta, que cuesta darla 30 segundos, casi llegan a tocarse (2m), y también llegan a alejarse hasta 24m. Representa en los ejes esta función. Para ello, utiliza las siguientes escalas:

- Eje X: 1 cuadradito = 5 segundos.
- Eje Y: 1 cuadradito = 2 metros.

Representa el intervalo correspondiente a 4 vueltas".

Actividad Tipo: Ejercicio.

Descripción: Dos ejercicios para trabajar con el crecimiento y los máximos y mínimos absolutos de una función. Este tipo de ejercicios se pueden encontrar desde en el libro de texto de 2º de la ESO, hasta en el libro de 4º (aunque en este curso ya se empieza a trabajar con más conceptos como el de Tasa de Variación).

Ejemplo:

2 Paper koadrikulatuan marraztutako ardatz cartesiarretan, adierazi 2-10 tartean definituta dagoen eta zati horretan gorakorra izango den funtzio bat.

3 Adierazi 0-12 tartean definituta dagoen funtzio bat, minimoa (3, 2) puntuan izango duena, eta maximoa, (7, 8) puntuan. Deskribatu zati gorakor bat eta zati beherakor bat.

Figura 3-8. Colera, Gaztelu; 2007 c, 147.

Traducción:
2. "En los ejes cartesianos dibujados en papel cuadriculado, indica una función que esté definida en el intervalo 2-10 y que sea creciente en el mismo".
3. "Indica una función que esté definida en el intervalo 0-12, que tenga un mínimo en el punto (3,2) y un máximo en el punto (7,8). Describe una parte creciente y otra parte decreciente".

Actividad Tipo: Ejercicio.

Descripción: Este es un ejercicio muy típico en los libros de texto de matemáticas. El ejercicio proporciona la expresión analítica de la función y esta hay que asociarla con una representación gráfica. Con ello se consigue que el alumno profundice en las características más importantes de cada tipo de función. Encontraremos el mismo ejercicio en libros de texto de cursos posteriores, pero obviamente, como se va trabajando con más tipos de funciones, el ejercicio se adaptará a esas condiciones.

Ejemplo:

19 Lotu beheko grafikoetako bakoitza honako adierazpen analitikoetako batekin:

1) $y = x + 1$ 2) $y = x^3$

3) $y = x^2$ 4) $y = -x + 1$

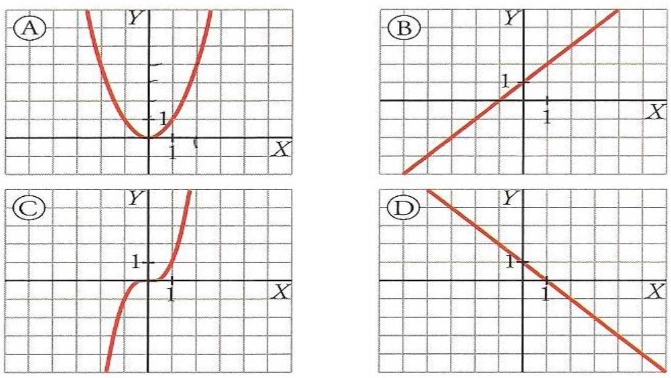


Figura 3-9. Colera, Gaztelu; 2007 c, 156.

Traducción:
"Relaciona cada uno de los gráficos con una de las expresiones analíticas".

Se propone primero un problema referido a funciones periódicas. Hay que hacer hincapié en que los contenidos y en este caso ejercicios son repetidos en cursos posteriores. Por ello en uno de los ejercicios del apartado 3.5. (Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, Humanidades y Ciencias Sociales), se ha expuesto un problema similar a este, donde además se asocia el contenido al mismo caso particular el espacio y el tiempo).

El último ejercicio, también aparece en muchas ocasiones en los diferentes libros de matemáticas. Se pueden encontrar este ejercicio en libros de texto de 2º de la ESO, pero en vez de asociar las expresiones analíticas con diferentes tipos de funciones, como solo se han estudiado funciones lineales, solo se introducen expresiones de este tipo. También aparecen hasta en libros de texto de 1º de Bachillerato, pero a medida que se vayan estudiando más tipos de funciones y consecuentemente más tipos de expresiones, la dificultad del ejercicio va creciendo.

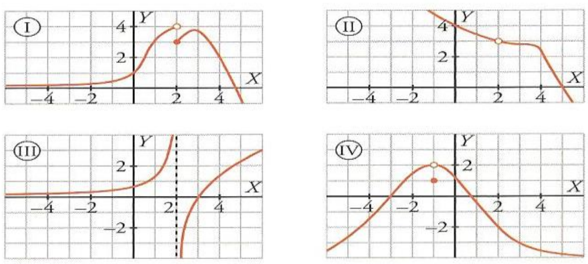
3.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, Ciencias y Tecnología

Actividad Tipo: Ejercicio.

Descripción: Ejercicio para trabajar la continuidad en una función. Esta noción, o ejercicios parecidos a este ya se pueden encontrar en los libros de texto de 3º de la ESO y por supuesto en una de las opciones de 4º de la ESO de Ciencias Sociales y Humanidades. Posteriormente, en Bachillerato, se comienzan a tratar con los límites de una función, muy unido a todo esto.

Ejemplo:

27 Honako grafiko hauek funtzio etenenak dira. Lotu funtzioetako bakoitza etena zergatik den azaltzen duen arrazoiarekin.



a) Jauzi bat du puntu batean.

b) Puntu bat desplazatuta du.

c) Adar infinituak ditu.

d) Puntu bat falta zaio.

Figura 3-10. Colera, Gaztelu; 2007 d, 99.

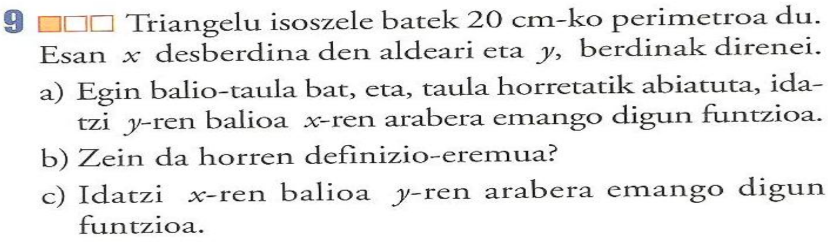
Traducción:
"Las siguientes funciones son discontinuas. Asocia cada gráfica con una de las razones de discontinuidad planteadas.

a) Salto en un punto.
b) Un punto desplazado.
c) Tiene cuernos infinitos.
d) Le falta un punto."

Actividad Tipo: Problema.

Descripción: Este ejercicio se realiza para que el alumno consiga identificar las diferentes formas de expresar una función a partir de un caso real (además de obtener el dominio de la misma). Además el ejercicio se combina con materia de geometría donde se debe conocer que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales, perímetro,…

Ejemplo:


9 Triangelu isoszele batek 20 cm-ko perimetroa du. Esan x desberdina den aldeari eta y, berdinak direnei.

a) Egin balio-taula bat, eta, taula horretatik abiatuta, idatzi y-ren balioa x-ren arabera emango digun funtzioa.

b) Zein da horren definizio-eremua?

c) Idatzi x-ren balioa y-ren arabera emango digun funtzioa.

Figura 3-11. Colera, Gaztelu; 2007 d, 97.

Traducción:
"Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm. Llamaremos x al lado del triángulo que es diferente y llamaremos y a los lados que son iguales.

a) Construye una tabla de valores, y a partir de esta escribe la función en la que los valores de y dependan de los valores que toma x..
b) ¿Cuál es su dominio?
c) Escribe la función en la que los valores de x dependan de los valores que toma y".

Actividad Tipo: Cuestión.

Descripción: En este ejercicio los alumnos deben razonar si la representación gráfica pertenece a una función periódica. Es decir, deben comprobar si el comportamiento de la variable independiente en un intervalo adopta se va repitiendo una y otra vez.

Ejemplo:

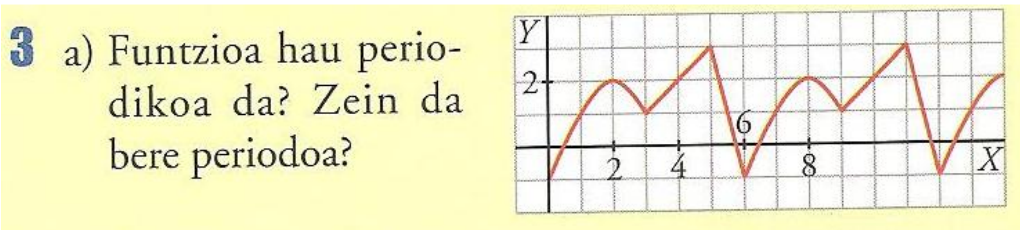


Figura 3-12. Colera, Gaztelu; 2007 d, 101.

Traducción:
"¿Es periódica la siguiente función?, ¿Cuál es su periodo?"

Lo más destacable en este apartado es que en uno de los ejercicios, aparece un contenido que no había aparecido en ninguno de los ejercicios de los libros de texto de cursos anteriores, la continuidad. Si que es cierto que se pueden encontrar ejercicios de continuidad en 3º de la ESO, pero donde se comienza a trabajar es en 4º de la ESO.

3.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º ESO, Ciencias Sociales

Actividad Tipo: Problema.

Descripción: Problema para trabajar la continuidad en una función.

Ejemplo:

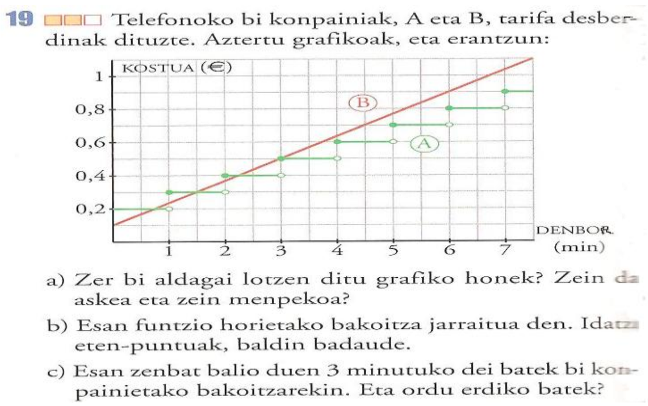


Figura 3-13. Colera, Gaztelu; 2007 e, 140.

Traducción:
"Dos compañías telefónicas, A y B, tienen tarifas diferentes. Analiza los gráficos y responde:

a) ¿Qué dos variables relaciona este gráfico?, ¿Cuál es dependiente y cual independiente?
b) Di si cada una de esas funciones es continua o no. Di donde se encuentran las discontinuidades si es que existen.
c) Di cuánto cuesta una llamada de tres minutos en ambas compañías. ¿y una de media hora?"

Actividad Tipo: Ejercicio.

Descripción: Este ejercicio trata de que el alumno trabaje con las funciones definidas a trozos. Hasta 4º de la ESO no aparece en los libros de texto ningún ejercicio relativo a las funciones definidas a trozos.

Ejemplo:

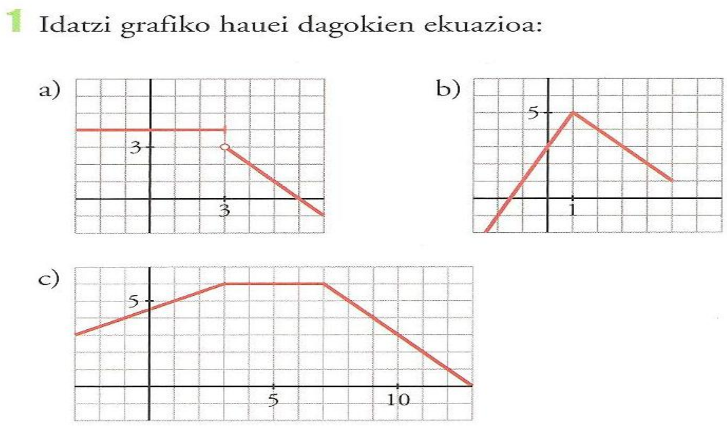


Figura 3-14. Colera, Gaztelu; 2007 e, 149.

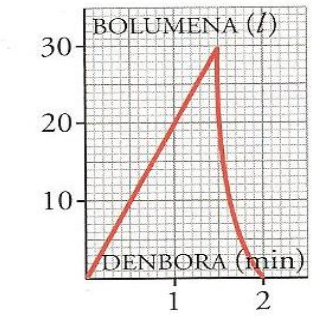
Traducción:
"Define la ecuación que corresponde con los siguientes gráficos"

Actividad Tipo: Problema.

Descripción: Otra manera de trabajar las funciones periódicas. En este caso, se propone un problema contextualizado.

Ejemplo:

2 Komun publiko batzuetako depositua modu automatikoan betetzen eta husten da, bi minuturik behin, honako grafiko honek erakusten duen erritmoaren arabera.



a) Irudikatu 10 min-ri dagokien grafikoa.

b) Zenbat ur egongo da deposituan honako une hauetan?

I) 17 min II) 40 min 30 s

III) 1 h 9 min 30 s

Figura 3-15. Colera, Gaztelu; 2007 e, 137.

Traducción:

"El deposito de los baños de unos aseos públicos se llena de forma automática. El gráfico muestra el ritmo de la variación de dichos depósitos cada dos minutos.

a) Representa el gráfico respectivo a 10 minutos.
b) ¿Cuanta agua habrá en el depósito en los siguientes momentos? 17 minutos; 40 minutos y 30 segundos; 1 hora 9 minutos y 30 segundos.

El segundo ejercicio es un ejercicio de funciones lineales donde dadas sus expresiones gráficas se deben construir sus expresiones analíticas. Este sería un ejercicio mas propio de 2º de la ESO, lo que ocurre es que tiene una dificultad añadida. Esas funciones lineales están definidas a trozos. Un concepto propio de 4º de la ESO.

3.6. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato, Ciencias y Tecnología

Actividad Tipo: Ejercicio.

Descripción: Representaciones gráficas de funciones racionales.

Ejemplo:

10. Esboza las gráficas de las siguientes funciones racionales tras hacer su estudio.
TIC

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1}$

Figura 3-16. Vizmanos, Hernández, Alcaide; 2008 a, 221.

Actividad Tipo: Ejercicio.

Descripción: Ejercicio para trabajar la noción de límite. Este tipo de ejercicio también se puede encontrar en el libro de texto de 1º de Bachillerato en la opción de Humanidades y Ciencias Sociales. Es un ejercicio trabaja con los límites, pero concretamente con los límites en donde la variable x tiende a infinito.

Ejemplo:

15. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 + 3x^2 - 1}{2x^3 + 8}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 1}{3x - 2}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + 7^x}$ f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 1}{6x^3 + 2x - 3}$

Figura 3-17. Vizmanos, Hernández, Alcaide; 2008 a, 192.

Actividad Tipo: Cuestión.

Descripción: Ejercicio para poder trabajar con el concepto de función de derivada, para poder trabajar la noción de recta tangente a una curva. Es un ejercicio que el libro lo define como complicado. No aparecerá en los libros de texto de Ciencias y Humanidades.

Ejemplo:

58 ¿Existe algún punto de la gráfica de $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1 + \text{sen}\, x}{1 - \text{sen}\, x}}$ con tangente horizontal?

Figura 3-18. Vizmanos, Hernández, Alcaide; 2008 a, 281.

Se observa una diferencia considerable entre los libros de texto analizados en el primer y segundo apartado (1º y 2º ESO) y los libros de texto de 1º de Bachillerato. La diferencia más considerable la soportan los contenidos ya que muchas veces el esquema del ejercicio se sigue manteniendo.

Si se observa el primer ejemplo de este apartado vemos que es un ejercicio igual a uno de los que se ha descrito en 2º de la ESO. Por ello, es interesante valorar en qué medida ha aumentado la dificultad del ejercicio. En este caso, también se deben representar gráficamente unas funciones (concretamente funciones racionales), y para ello se debe llevar a cabo el estudio de la función: puntos de corte, dominio, recorrido, simetrías, asíntotas, continuidad, valores extremos (absolutos y relativos), Este ejercicio ha variado en cuanto a los contenidos se refiere.

Los otros dos ejercicios se adjuntan para exponer nuevos conceptos propios de 1º de Bachiller (límites, tangente horizontal, etc.).

3.7. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º Bachillerato, Ciencias Sociales

Actividad Tipo: Ejercicio

Descripción: Cuando se han analizado los libros de texto de 2º de la ESO, se ha expuesto un ejercicio semejante. Por ello, es interesante observar en qué medida ha aumentado la dificultad del ejercicio. En este caso, también se deben representar gráficamente unas funciones (concretamente funciones polinómicas).

Ejemplo:

7. Esboza las gráficas de las siguientes funciones polinómicas.

a) $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$ c) $f(x) = -2x(x^2-3x+2)$

b) $f(x) = (x^2-4)(x+1)$ d) $f(x) = -4(x-1)^2(x-3)^2$

Figura 3-19. Vizmanos, Hernández, Alcaide; 2008 b, 177.

Actividad Tipo: Cuestión.

Descripción: Este ejercicio plantea tres cuestiones. Para realizarlas, el alumno debe comprender bien las diferentes propiedades de los límites. Previamente en este capítulo aparece otro tipo de ejercicio con respecto a los límites, por lo tanto se aprecia la diversidad entre ejercicios del mismo tema o noción.

Ejemplo:

4. Se sabe que las funciones f y g tienen límite en el punto $x = a$. Además, $\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = -1$. Di si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

b) Si $\lim_{x \to a} g(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = 4$

c) $\lim_{x \to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ es un cuadrado perfecto.

Figura 3-20. Vizmanos, Hernández, Alcaide; 2008 b, 156.

Actividad Tipo: Problema.

Descripción: Un problema de optimización. Para que el alumno aplique la noción de derivada. En los libros de texto de la opción de Ciencias y Tecnología de primero de Bachillerato, también se encuentran problemas de optimización como este. También es cierto que el ejercicio planteado previamente en el apartado de dicha modalidad no podría aparecer en este apartado ya que ese tipo de cuestiones no aparecen en los libros de texto de 1º de Bachillerato en Humanidades y Ciencias Sociales

Ejemplo:

24. Un agricultor dispone de 400 m de alambre con los que quiere vallar un campo rectangular aprovechando que un río hace ya de valla en un lado. ¿Cómo debe hacerlo para cercar la máxima superficie?

Figura 3-21. Vizmanos, Hernández, Alcaide; 2008 b, 209.

En el apartado 3.7. se muestran un ejercicio, una cuestión y un problema representativos de la modalidad de este curso. Hay que destacar que existen dos modalidades diferentes en este curso, y que los libros de texto utilizados en cada uno de ellos son diferentes. Por lo tanto las diferencias en los ejercicios del tema de las funciones son variadas.

Capítulo 4.
Resultados

En los capítulos anteriores se han expuesto los contenidos y criterios de evaluación en relación a las funciones en diferentes etapas de la Educación. Además, se ha presentado una extracción de ejercicios, problemas y cuestiones de los libros de texto relacionados con el contenido matemático en cuestión.

En este capítulo se indican las ausencias y presencias de contenidos tanto en el currículo como en los diferentes libros de texto estudiados así como conclusiones respecto a la coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

4.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

Si se realiza un breve repaso a lo expuesto en los capítulos 1, 2 y 3, se observa que tanto en el currículo vigente como en los libros de texto de la Educación Secundaria existe una continuidad en la mayoría de los contenidos tratados.

En el primer capítulo se han descrito los contenidos del currículo vigente diferenciando diferentes descriptores. Todos ellos, de una manera o de otra, tienen una continuidad a lo largo de las diferentes etapas, apareciendo de una manera o de otra, aunque en ciertos casos ha podido ocurrir que un descriptor concreto no aparezca en una etapa determinada.

De la misma manera, en el análisis de los libros de texto en el tercer capítulo, se observa que la gran mayoría de los ejercicios tipo tienen continuidad a lo largo de los cursos, se han encontrado diversos ejemplos donde se encontraban ejercicios muy similares en libros de texto de cursos diferentes.

Resumiendo, se observa que en todos los cursos educativos se repasa lo visto en el curso previo añadiendo conceptos que contienen alguna novedad o alguna dificultad añadida. Esta continuidad en la que se van introduciendo los contenidos poco a poco se designa aprendizaje en espiral.

En los libros de texto se utilizan numerosas actividades (generalmente problemas) donde se toman como modelo las situaciones de la vida cotidiana, es decir, problemas contextualizados donde los alumnos deben ejercitar los contenidos aplicándolos en casos de la vida real. Son muy frecuentes y muy variados, y de la misma manera el currículo vigente expone repetidamente diferentes contenidos con los que hay que aplicar este tipo de situaciones.

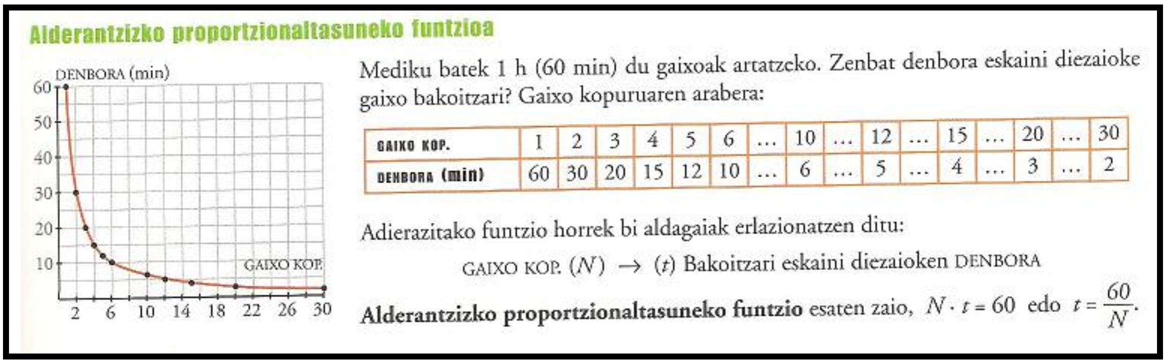
De entre las actividades tipo presentadas en el capítulo 3, se observa una ausencia de actividades tipo cuestión. La proporción de cuestiones presentadas en los diferentes libros de texto es muy inferior a los problemas o ejercicios.

Es interesante destacar que en todos los libros de texto de Educación Secundaria analizados, los temas se dividen en diferentes bloques: aritmética, álgebra, geometría, funciones y estadística (pudiendo variar dependiendo del libro de texto que se observe).

Las funciones están relacionadas con todos los bloques pero esta relación no aparece ni en el currículo vigente ni en los libros de texto, de tal manera que las funciones aparecen como un bloque independiente más.

4.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

La cuestión más destacable a la hora de hablar de la coherencia entre los libros de texto y el currículo vigente es la presencia de más contenidos en los libros de texto. Los contenidos existentes en los libros de texto son superiores a los marcados por el currículo vigente. Esto no resulta extraño ya que el currículo oficial presenta únicamente los contenidos mínimos. Como ejemplo de esta cuestión adjuntamos un ejercicio del libro de texto de 2º de la ESO donde se trata la función de proporcionalidad inversa. Si observamos el currículo, el reconocimiento de este modelo de funciones no se realiza hasta 4º de la ESO.


Alderantzizko proportzionaltasuneko funtzioa

Mediku batek 1 h (60 min) du gaixoak artatzeko. Zenbat denbora eskaini diezaioke gaixo bakoitzari? Gaixo kopuruaren arabera:

GAIXO KOP.	1	2	3	4	5	6	...	10	...	12	...	15	...	20	...	30
DENBORA (min)	60	30	20	15	12	10	...	6	...	5	...	4	...	3	...	2

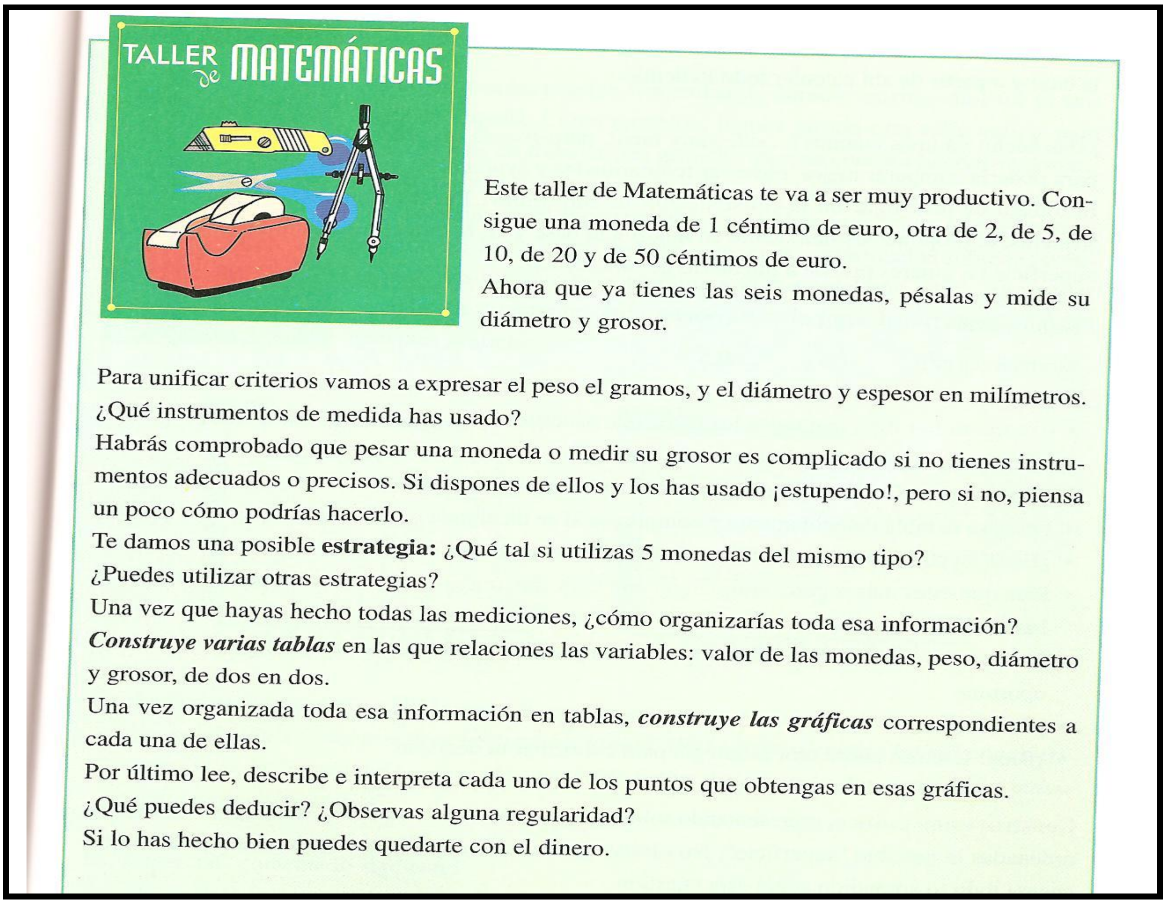
Adierazitako funtzio horrek bi aldagaiak erlazionatzen ditu:

GAIXO KOP. (N) $\rightarrow$ (t) Bakoitzari eskaini diezaioken DENBORA

Alderantzizko proportzionaltasuneko funtzio esaten zaio, $N \cdot t = 60$ edo $t = \frac{60}{N}$.

Figura 4-1. Función de proporcionalidad inversa en un libro de texto de 2º ESO.

Ya se ha comentado previamente que en el currículo vigente se le da mucha importancia a la modelización de los diferentes contenidos de las funciones a situaciones de la vida real. Es cierto que los problemas contextualizados donde se pueden trabajar este tipo de situaciones son muy frecuentes. Pero se a una pequeña ausencia de actividades prácticas en los libros de texto donde se deban realizar procedimientos más reales tales como pequeños proyectos. A continuación se muestra un proyecto tipo seleccionado del libro de texto “matemáticas 1 E.S.O.” (Berenguer, 2002, 223):



TALLER de MATEMÁTICAS

Este taller de Matemáticas te va a ser muy productivo. Consigue una moneda de 1 céntimo de euro, otra de 2, de 5, de 10, de 20 y de 50 céntimos de euro.
Ahora que ya tienes las seis monedas, pésalas y mide su diámetro y grosor.

Para unificar criterios vamos a expresar el peso el gramos, y el diámetro y espesor en milímetros.
¿Qué instrumentos de medida has usado?
Habrás comprobado que pesar una moneda o medir su grosor es complicado si no tienes instrumentos adecuados o precisos. Si dispones de ellos y los has usado ¡estupendo!, pero si no, piensa un poco cómo podrías hacerlo.
Te damos una posible **estrategia:** ¿Qué tal si utilizas 5 monedas del mismo tipo?
¿Puedes utilizar otras estrategias?
Una vez que hayas hecho todas las mediciones, ¿cómo organizarías toda esa información?
Construye varias tablas en las que relaciones las variables: valor de las monedas, peso, diámetro y grosor, de dos en dos.
Una vez organizada toda esa información en tablas, ***construye las gráficas*** correspondientes a cada una de ellas.
Por último lee, describe e interpreta cada uno de los puntos que obtengas en esas gráficas.
¿Qué puedes deducir? ¿Observas alguna regularidad?
Si lo has hecho bien puedes quedarte con el dinero.

Figura 4-2. Actividad práctica de funciones.

Una vez analizadas las presencias y ausencias en los contenidos del currículo vigente y en las actividades de los libros de texto y teniendo en cuenta la coherencia entre ambos, se puede concluir que existe un alto grado de correspondencia entre los contenidos que presentan los libros de texto y los señalados en el currículo.

Esta sincronía no es casual ya que el currículo indica los contenidos que deben ser enseñados en cada nivel educativo así como los criterios de evaluación, estando ambos regidos por la legislación. Consecuentemente, las distintas editoriales deben ajustarse a estos criterios para que sus materiales sean escogidos por los distintos centros educativos de la geografía española.

Parte II:

Análisis de un proceso de estudio de las funciones en 3º de Educación Secundaria Obligatoria de Diversificación

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se analiza un proceso de estudio de las funciones en 3º ESO de diversificación.

El análisis se divide en otros cuatro capítulos. En el quinto capítulo se analizan los diferentes libros de texto de referencia utilizados para la docencia del tema de las funciones. Las dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica se muestran en el sexto capítulo, además de un apartado donde se describe el programa de diversificación. En el séptimo capítulo se presenta el proceso de estudio en el que se especifica la distribución del tiempo de la clase, las actividades adicionales planificadas y la tarea prevista.

En el octavo capítulo se presenta la fase de experimentación en la que primero se expone la muestra y el diseño de la experimentación. Posteriormente, se efectúa una descripción de los resultados obtenidos con el cuestionario, y luego se nombran las conclusiones más características. Finalmente, se añade un apartado con una pequeña investigación de cómo se denomina la función 1/x en su presentación

Capítulo 5.
Las funciones en el libro de texto de referencia para alumnos de 3º de ESO de diversificación.

En este capítulo se analiza el libro de texto utilizado para realizar la docencia con los alumnos de 3º de la ESO de diversificación.

Concretamente, el análisis se realiza a varios libros de texto, ya que siendo alumnos de 3º de diversificación los conceptos tratados son de menor nivel, teniendo que recurrir a libros de, incluso, 1º y 2 º de ESO. Pero no solo por el nivel de los conceptos tratados, sino que, por ser alumnos de diversificación, su programación cambia totalmente, y por ello también hay que recurrir al libro de texto de incluso 4º de la ESO.

Los libros de texto utilizados son de la misma editorial, editorial Anaya Haritza del año 2007 (el título de los libros se puede consultar en el apartado de referencias).

5.1. Objetivos matemáticos involucrados

A continuación se nombran los objetivos matemáticos involucrados en la unidad didáctica de este grupo de 3º de la ESO diversificación. Para ello, se toman como referencia cinco configuraciones respectivas al tema en cuestión, siendo todas ellas los diferentes bloques del tema que se ha tratado:

- Sistema de Coordenadas Cartesianas.
- Concepto y características de la función.
- Representación gráfica de la función lineal.
- Representación gráfica de la función cuadrática.
- Representación gráfica de la función de proporcionalidad inversa.

Seguidamente, se realiza una pequeña clasificación con todos los objetivos involucrados para cada una de las configuraciones antes nombradas, teniendo en cuenta que todos ellos están relacionados entre sí.

Configuración epistémica empírica del Sistema de Coordenadas Cartesianas

LENGUAJE
• **Verbal:** Gráfica, representación, relación, características, ejes de coordenadas, origen de coordenadas, ordenada, abscisa, recta, punto, coordenadas, coordenadas cartesianas, punto de intersección, paralelas, coincidentes, corte de dos rectas en un punto, pasa por, tabla de valores, estudia, asocia, obtén, averigua, halla, indica, dibujar, obtener, determina, analiza, plano, cuadrante, negativo, positivo, decimal, escala. • **Gráfico:** Representación gráfica del Sistema de Ejes Cartesianos identificando los dos ejes, parte positiva y negativa y unidades de la escala escogida. Representación gráfica de puntos. • **Simbólico:** Utilización de paréntesis para representar puntos en forma de coordenadas, letras mayúsculas para simbolizar puntos, etc.

SITUACIONES	CONCEPTOS
- Problemas descontextualizados en los que se pide representar de forma gráfica puntos indicados en forma de coordenada. - Problemas descontextualizados en los que se pide indicar en forma de coordenada puntos representados de forma gráfica.	Coordenadas Cartesianas, escala, unidades de escala, eje de abscisas, eje de ordenadas, coordenadas con números naturales, coordenadas con números enteros, coordenadas con números racionales.
PROCEDIMIENTOS	**PROPIEDADES**
Representación gráfica de coordenadas y viceversa.	- Todos los puntos formados por números reales son representables en el Sistema de Ejes Cartesianos.
ARGUMENTOS	
No se realizan argumentaciones ni demostraciones.	

Tabla 5-1. Objetivos matemáticos involucrados en el S.C.C.

Configuración epistémica empírica del concepto y características de la función

LENGUAJE	
• **Verbal:** Gráfica, representación, en función de, relación, características, variable dependiente e independiente, función decreciente, función creciente, máximo, mínimo, función continua, pendiente, ejes de coordenadas, expresión algebraica, recta, ecuación, punto, coordenadas, punto de intersección, coincidentes, pasa por, tabla de valores, estudia, asocia, calcula, cálculo, halla, relaciona, razona, resuelve, indica, dibuja, obtén, determina, analiza. • **Gráfico:** Representación gráfica de funciones. • **Simbólico:** Letra x para representar la variable independiente, letra y para representar la variable independiente, expresión algebraica de una función, etc.	
SITUACIONES	**CONCEPTOS**
- Problemas descontextualizados donde se deben diferenciar representaciones gráficas funcionales y no funcionales. - Problemas contextualizados para interpretar e identificar diferentes características de funciones como máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento, etc.	Función, variables dependiente, variable independiente, relación entre dos variables funcionales, máximo, mínimo, función creciente, función decreciente.

PROCEDIMIENTOS	PROPIEDADES
- Descontextualización del enunciado del problema. - Contextualización de enunciados descontextualizados. - Interpretación y obtención de la información de una función.	- Para cada valor de la variable x corresponde un único valor de y o ninguno. - Para cada valor de y corresponderá un valor de x, varios valores de x u ningún valor de x.
ARGUMENTOS	
No se realizan argumentaciones ni demostraciones.	

Tabla 5-2. Objetivos matemáticos involucrados en el concepto y las características de la función.

Configuración epistémica empírica de la función lineal

LENGUAJE	
• **Verbal:** Gráfica, representación, en función de, relación, características, proporcionalidad directa, variable dependiente e independiente, función decreciente y creciente, función lineal, función afín, función de proporcionalidad, función cuadrática, pendiente, ordenada en el origen, ejes de coordenadas, sistemas de ecuaciones, expresión algebraica, recta, ecuación, incógnitas, punto, coordenadas, coordenadas cartesianas, punto de intersección, paralelas, pasa por, tabla de valores, estudia, asocia, calcula, cálculo, halla, sustituye, relaciona, razona, resuelve, indica, dibuja, representa, obtén, determina, analiza, recta, infinito. • **Gráfico:** Representación gráfica de funciones proporcionales, funciones lineales y funciones afines. Representación de los pares de coordenadas en tablas de valores. • **Simbólico:** Expresión algebraica de funciones proporcionales, lineales y afines. Letra m para representar la pendiente. Letra n para representar la ordenada en el origen.	
SITUACIONES	**CONCEPTOS**
- Problemas contextualizados de funciones en los que se debe interpretar la situación que marcan las dos variables (dependiente e independiente). - Problemas descontextualizados con tablas de valores para representar gráficas, indicar características y realizar cálculos. - Problemas descontextualizados de funciones dadas mediante una expresión algebraica para representar gráficas, indicar características y realizar cálculos o tablas de valores. - Problemas descontextualizados de funciones para realizar relaciones entre expresiones analíticas y expresiones gráficas.	Función lineal, diferentes tipos de expresiones de la función lineal (expresión algebraica, expresión gráfica, tabla de valores), la pendiente en una función lineal (parámetro m), la ordenada en el origen (parámetro n).

PROCEDIMIENTOS	PROPIEDADES
- Representación gráfica de funciones lineales - Interpretación de características de funciones lineales. - Asociación de expresiones algebraicas con gráficas y viceversa.	- Las expresiones algebraicas de funciones lineales que tengan parámetro m=0 pertenecen a funciones afines (no existe pendiente). - Las expresiones algebraicas de funciones lineales que tengan parámetro n=0 pertenecen a funciones de proporcionalidad. Todas ellas pasarán por el origen de coordenadas. - Todas las funciones lineales adoptan forma de recta en sus representaciones gráficas.
ARGUMENTOS	
Demostración con GeoGebra de las tres propiedades mencionadas.	

Tabla 5-3. Objetivos matemáticos involucrados en el estudio de la función lineal.

Configuración epistémica empírica de la función cuadrática

LENGUAJE	
• **Verbal:** Gráfica, representación, en función de, relación, características, variable dependiente e independiente, función cuadrática, ejes de coordenadas, grado, punto, coordenadas, punto de intersección, pasa por, tabla de valores, estudia, asocia, calcula, cálculo, obtén, averigua, halla, relacionar, razona, indica, dibuja, representa, determina, analiza, parábola, vértice, infinito. • **Gráfico:** Representación gráfica de funciones cuadráticas. Representación de los pares de coordenadas en tablas de valores. • **Simbólico:** Expresión algebraica de la función cuadrática.	
SITUACIONES	**CONCEPTOS**
- Problemas contextualizados de funciones en los que se debe interpretar la situación que marcan las dos variables (dependiente e independiente). - Problemas descontextualizados con tablas de valores para representar gráficas, indicar características y realizar cálculos. - Problemas descontextualizados de funciones dadas - mediante una expresión algebraica para representar gráficas, indicar características y realizar cálculos o tablas de valores. - Problemas descontextualizados de funciones para realizar relaciones entre expresiones analíticas y expresiones gráficas.	Función cuadrática, diferentes tipos de expresiones de la función cuadrática (expresión algebraica, expresión gráfica, tabla de valores)

PROCEDIMIENTOS	PROPIEDADES
- Representación gráfica de funciones cuadráticas. - Asociación de expresiones algebraicas con gráficas y viceversa.	- Todas las funciones cuadráticas adoptan forma de parábola en sus representaciones gráficas.

ARGUMENTOS
Demostración con GeoGebra de la propiedad mencionada.

Tabla 5-4. Objetivos matemáticos involucrados en el estudio de la función cuadrática.

Configuración epistémica empírica de la función de proporcionalidad inversa

LENGUAJE
• **Verbal:** Gráfica, representación, en función de, relación, características, proporcionalidad inversa, variable dependiente e independiente, función de proporcionalidad inversa, ejes de coordenadas, expresión algebraica, punto, coordenadas, coordenadas cartesianas, paralelas, pasa por, tabla de valores, estudia, asocia, calcula, cálculo, obtén, averigua, halla, relaciona, indica, transforma, dibuja, representa, obtén, determina, sustituye, analiza, hipérbola, asíntota horizontal, asíntota vertical, infinito. • **Gráfico:** Representación gráfica de funciones de proporcionalidad inversa. Representación de los pares de coordenadas en tablas de valores. • **Simbólico:** Expresión algebraica de funciones de proporcionalidad inversa. Símbolo de infinito: ∞ .

SITUACIONES	CONCEPTOS
- Problemas contextualizados de funciones en los que se debe interpretar la situación que marcan las dos variables (dependiente e independiente). - Problemas descontextualizados con tablas de valores para representar gráficas, indicar características y realizar cálculos. - Problemas descontextualizados de funciones dadas mediante una expresión algebraica para representar gráficas, indicar características y realizar cálculos o tablas de valores. - Problemas descontextualizados de funciones para realizar relaciones entre expresiones analíticas y expresiones gráficas.	Función de proporcionalidad inversa, diferentes tipos de expresiones de la función de proporcionalidad inversa (expresión algebraica, expresión gráfica, tabla de valores),

PROCEDIMIENTOS	PROPIEDADES
- Representación gráfica de funciones lineales y asociación de expresiones algebraicas con gráficas y viceversa.	- Todas las funciones de proporcionalidad inversa adoptan forma de hipérbola en sus representaciones gráficas.

ARGUMENTOS
No se realizan argumentaciones ni demostraciones.

Tabla 5-5. Objetivos matemáticos involucrados en el estudio de la función de proporcionalidad inversa.

5.2. Análisis global de la unidad didáctica

Como ya se ha comentado previamente, los libros de texto que han sido utilizados como referencia para la docencia de este grupo son varios. Debido a que es un grupo de 3º de la ESO diversificación y consecuentemente debido a que un grupo así necesita una programación diferente, se han utilizado como medio de estudio y para la construcción de una pequeña unidad didáctica sobre el tema de las funciones, libros de texto de matemáticas de 1º, 2º, 3º y 4º de ESO.

Independientemente de que los contenidos se hayan extraído de libros de texto de matemáticas de diferentes cursos, la forma en la que aparecen descritos los conceptos de cada bloque en el libro de texto correspondiente es muy parecida, ya que se han utilizado libros de texto de la misma editorial.

Todos los bloques que se han considerado o lo que es lo mismo, todos los subapartados diferenciados por el libro de texto tienen una estructura muy parecida, todos ellos responde a un mismo patrón:

- Número y título del subapartado.

- Descripción y exposición del contenido. Si el bloque abarca mucha materia, se divide en dos o tres partes diferentes y se exponen a lo largo de las páginas de ese subapartado.

- Después de la exposición de cada una de las partes del contenido, aparece un ejercicio resuelto dentro de un cuadro rojo con título *“ariketa ebatzia”* (“Ejercicio resuelto”).

- Dentro de la exposición y descripción del contenido, la definición y los conceptos más importantes aparecen en un recuadro sombreado en amarillo.

- Todo lo anterior se realiza en mitad de la página. Pero al mismo tiempo, si la materia y el contenido lo posibilita, en la parte izquierda de la página, en modo de columna, van apareciendo curiosidades, gráficos, imágenes, cuestiones abiertas, ejemplos, etc. que permiten aumentar la capacidad de aprendizaje del alumno.

- Para finalizar, el libro propone tres o cuatro ejercicios para cada parte de los contenidos expuestos. Estos ejercicios están dentro de un cuadro verde bajo el nombre de “*Ariketak*” (“Ejercicios”).

En el apartado de referencias de este trabajo, está adjunta la unidad didáctica creada a partir de los diferentes libros de texto. En ella se pueden observar los apartados mencionados en los últimos puntos. Además de los contenidos con los diferentes bloques, todos libros de texto utilizados tienen en cada tema:

- Una página principal en la cual se presenta el tema de funciones con el título, un dibujo, y alguna cuestión interesante.

- Una página (seguida a la página principal) de repaso donde se recuerdan los conceptos vistos los cursos anteriores en relación al tema de la función.

- Un apartado con problemas y ejercicios sobre todos los bloques expuestos. Este, aparece después de todos los sub apartados del tema y aparece bajo el título "*Ariketak eta problemak*" ("Ejercicios y problemas).

- Un apartado para profundizar más en el tema en cuestión. Los contenidos de este apartado son de un nivel superior al estudiado, pero suelen aparecer cosas interesantes e incluso cuestiones propias de cursos futuros. Son las últimas páginas del tema y se denomina "*Gaitasunak garatu*" (desarrollo de habilidades").

Estos últimos puntos han descrito cual es la forma en la que todos los libros de texto utilizados exponen el tema de las funciones. Obviamente, para la docencia de este caso concreto, se ha ido extrayendo de cada uno de los libros la información necesaria.

Antes de concretar que conceptos se han extraído de cada uno de los libros, existe la necesidad de repetir los contenidos que se han tratado durante el periodo de docencia (aunque sea a modo global). Obviamente, estos coinciden con las configuraciones expuestas en el apartado anterior: Sistema de Coordenadas Cartesianas, concepto y características de la función, representación gráfica de la función lineal, representación gráfica de la función cuadrática y representación gráfica de la función de proporcionalidad inversa.

Estos contenidos no son los que corresponderían a un aula de 3º de la ESO ordinaria. En una unidad didáctica de 3º de la ESO ordinaria (aunque puede haber pequeñas variaciones de una a otra), los contenidos del tema de la función no abarcarían tantos tipos de funciones (tal y como se observa en este caso), pero al contrario se centrarían mucho más en la función y sus características (funciones y gráficos; tasa de variación; tendencias; continuidad; expresión analítica; etc.) y en concreto con la función lineal (función de proporcionalidad y función lineal; recta a partir de la pendiente y un punto; recta a partir de dos puntos; diferentes formas de la ecuación de una recta; aplicaciones de la función lineal; relación entre dos funciones lineales; etc.).

Por ello, es obvio que se ha realizado un cambio considerable en la unidad didáctica de estos alumnos, por lo menos en lo que a los contenidos se refiere.

Uno de los motivos por el que se ha realizado esta operación concreta en este tema es que la diversificación tiene una proyección de dos años. Los cursos de 3º y 4º de la ESO diversificación hay que entenderlos como dos cursos donde debe existir un seguimiento de uno a otro e intentar evitar que sean dos cursos totalmente diferentes e independientes. Por ello se ha preferido centrar en las representaciones de diferentes tipos de funciones.

Las representaciones exigen un trabajo parecido independientemente de la tipología a la que pertenezca la función. Por lo tanto, en el primer año de diversificación se centran más en las representaciones y en el segundo continúan realizándolas, pero además profundizan mas dentro de cada tipo de función, estudiando las características de las mismas (de la misma manera que lo hacen los alumnos de 3º de la ESO ordinaria con las funciones lineales).

A continuación, se muestra un pequeño cuadro donde se marca el libro de texto o los libros de texto que se han utilizado como referencia para la docencia de los cinco bloques que se han diferenciado anteriormente:

	1º ESO	**2º ESO**	**3º ESO**	**4º ESO**
Sistema de Coordenadas Cartesianas	X			
Función: Concepto y características		X	X	
Repr. G. función lineal		X	X	
Repr. G. función cuadrática				X
Repr. G. Función proporc. inversa				X

Tabla 5-6. Curso de los libros de texto utilizados como referencia en los diferentes bloques estudiados.

Y ahora, se describe más profundamente la información adquirida de cada uno de ellos.

Sistema de Coordenadas Cartesianas

La Teoría adquirida se presenta en dos subapartados además de un apartado adicional con ejercicios de todo tipo. El primero de ellos expone el concepto de coordenadas cartesianas con un pequeño texto acompañado además de un gráfico y un ejercicio resuelto. Al final del apartado se proponen tres ejercicios respectivos al tema. El segundo de los apartados trata de explicar el sistema, pero en este caso, hace referencia tanto a números negativos como fraccionarios. Este subapartado también va acompañado de un gráfico y un ejercicio resuelto, y para finalizar dos ejercicios. (Cólera, 2007a; 258-259, 270).

1 Koordenatu cartesiarrak

Ardatz cartesiarren sisteman:

- Ardatz horizontala X ardatza edo **abzisa-ardatza** da.
- Ardatz bertikala Y ardatza edo **koordenatu-ardatza** da.
- Bi ardatzek elkar ebakitzen duten O, puntua, **koordenatuen jatorria** da.

Planoko puntu bakoitza beraren bi koordenatuekin adierazten da:

- Lehenengo koordenatua "puntuaren x" edo **abzisa** da.
- Bigarren koordenatua "puntuaren y" edo **ordenatua** da.

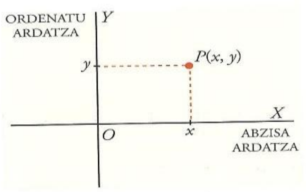


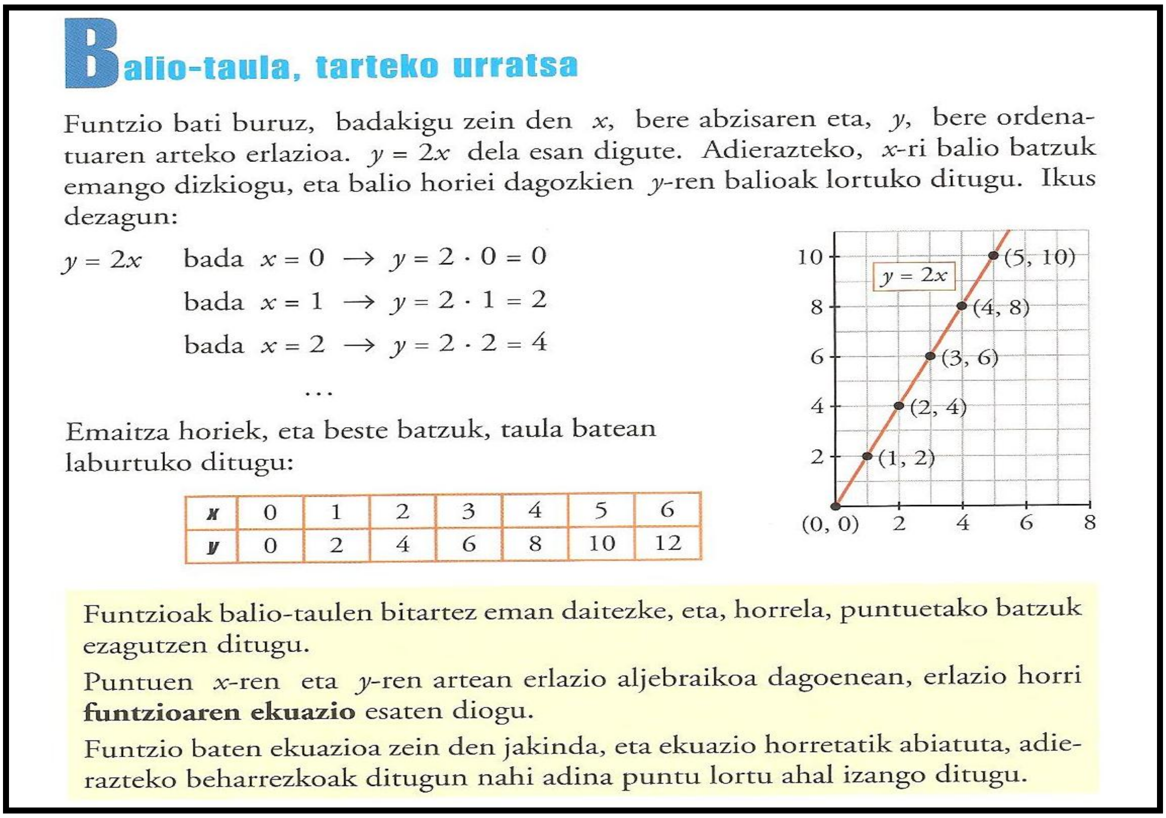
Figura 5-1. Teoría sobre coordenadas cartesianas en el libro de texto.

Función. Concepto y características

El material relativo al concepto y las características de la función se ha obtenido de los libros de texto de 2º y 3º de la ESO.

Del libro de 2º de la ESO se han tomado tres subapartados, “Concepto de la función”, “Crecimiento, máximos y mínimos” y “Funciones representadas en tablas de valores”. Cada uno de estos subapartados tiene su parte teórica (con gráficos y ejercicios resueltos) y además 2 ó 3 ejercicios. De este se libro también se han utilizado ejercicios de la parte final del tema, en la cual se proponen diferentes cuestiones. (Cólera, 2007b; 223-225, 233-234).

Con el libro de texto de 3º de la ESO se ha realizado la misma operación. Se han utilizado dos subapartados del tema de funciones, “Funciones y gráficos” y “Variaciones de una función”. No se ha requerido toda la información del subapartado, pero si la necesaria para completar los conceptos del libro de texto de 2º de ESO. (Cólera, 2007c; 144-147).



Balio-taula, tarteko urratsa

Funtzio bati buruz, badakigu zein den x, bere abzisaren eta, y, bere ordenatuaren arteko erlazioa. $y = 2x$ dela esan digute. Adierazteko, x-ri balio batzuk emango dizkiogu, eta balio horiei dagozkien y-ren balioak lortuko ditugu. Ikus dezagun:

$y = 2x$ bada $x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 = 0$

bada $x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2$

bada $x = 2 \rightarrow y = 2 \cdot 2 = 4$

...

Emaitza horiek, eta beste batzuk, taula batean laburtuko ditugu:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	4	6	8	10	12

Funtzioak balio-taulen bitartez eman daitezke, eta, horrela, puntuetako batzuk ezagutzen ditugu.

Puntuen x-ren eta y-ren artean erlazio aljebraikoa dagoenean, erlazio horri **funtzioaren ekuazio** esaten diogu.

Funtzio baten ekuazioa zein den jakinda, eta ekuazio horretatik abiatuta, adierazteko beharrezkoak ditugun nahi adina puntu lortu ahal izango ditugu.

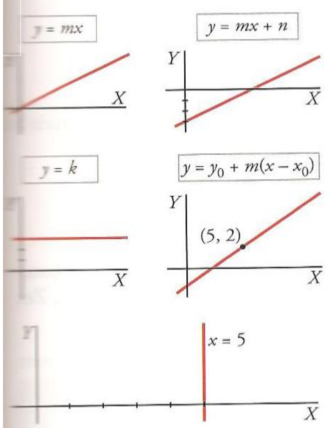
Figura 5-2. Teoría sobre construcción de representaciones tabulares en el libro de texto.

Representación gráfica de la función lineal

En el caso del estudio de la función lineal ocurre lo mismo. Se utilizan los libros de texto de 2º y 3º de la ESO.

Del libro de 2º de la ESO se han utilizado dos subapartados: “Funciones lineales” y “Funciones afines” (aunque en Euskara se definen como constantes). Se ha utilizado para realizar la docencia de la teoría y además se han escogido algunos de los ejercicios. (Cólera, 2007b; 230-233, 235).

En el libro de texto de 3º de la ESO hay un tema únicamente dedicado a las funciones lineales. No se ha profundizado tanto en el tema por lo tanto solo se han utilizado ciertos subapartados: “Función y = mx + n” y “Forma general de la ecuación de una recta”. Además de todo ello, ciertos ejercicios del final del tema. (Cólera, 2007c; 164, 167, 170-171).



Orain arte, zuzen baten ekuazioa emateko zenbait modu ikusi ditugu. Baina ikusten duzunez, eragiketak eginez, denak forma honetan jar daitezke: $ax + by = c$.

FUNTZIO MOTA	ADIBIDEA	$ax + by = c$ ALDAKUNTZA
$y = mx$	$y = \frac{1}{2}x$	$\mathbf{x - 2y = 0}$; $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$
$y = mx + n$	$y = \frac{1}{2}x - 3$	$\mathbf{x - 2y = 6}$; $a = 1$, $b = -2$, $c = 6$
$y = k$ (X ardatzarekiko paralelo)	$y = 3$	$\mathbf{0x + y = 3}$; $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$
$y = y_0 + m(x - x_0)$	$y = 2 + \frac{3}{4}(x - 5)$	$\mathbf{3x - 4y = 7}$; $a = 3$, $b = -4$, $c = 7$

Y ardatzarekiko zuzen paraleloek ere hartzen dute adierazpen hori: $x = k$. Baina **zuzen horiek ez dira funtzioen grafikoak,** x-ren balio bati y-ren balio asko (infinitu) dagozkio eta.

Eragiketak eginez, zuzen baten edozein ekuazioa $ax + by = c$ forman jar daiteke. Horregatik esaten da zuzenaren ekuazioaren **forma orokorra** dela.

$a \neq 0$ eta $b = 0$ denean, zuzena Y ardatzarekiko paraleloa da, eta ez dagokio funtzio baten grafikoari.

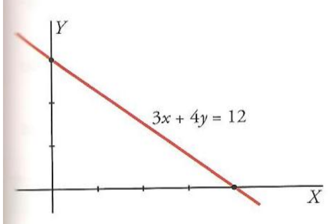
$b \neq 0$ denean, kasu guztietan, zuzena funtzio bati dagokio. Horiei guztiei **funtzio lineal** esaten diegu.

Forma orokorraren bitartez emandako zuzen bat adierazteko, hau egin dezakegu:

— Zuzeneko bi puntu lortu, aldagaiei balioak emanez.

— y bakandu, $y = mx + n$ formako adierazpena lortzeko.

Ariketa ebatzia



Adierazi $3x + 4y = 12$. Zer malda du?

- Balioak emanez: $x = 0 \rightarrow y = 3$. (0, 3)-tik pasatzen da. $x = 4 \rightarrow y = 0$. (4, 0)-tik pasatzen da.
- y bakanduz: $y = -\frac{3}{4}x + 3$

Bi informazioetako edozeinekin adieraz dezakegu zuzena.

Malda $-\frac{3}{4}$ da. x-ren koefizientea da, y bakanduta dagoenean.

Figura 5-3. Teoría sobre expresión de la ecuación de una recta en el libro de texto.

Representación gráfica de la función cuadrática y de la función de proporcionalidad inversa

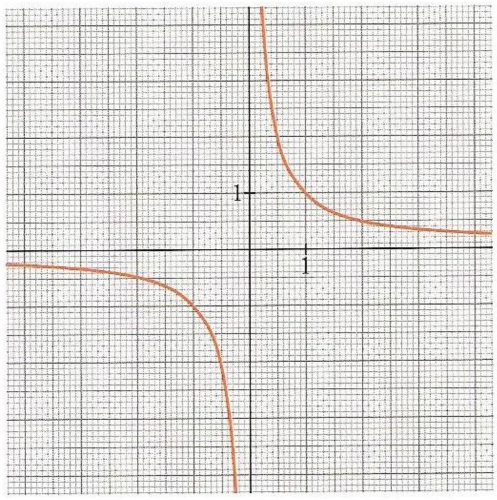
Para obtener contenidos de esta materia se ha recurrido a un libro de texto de un curso superior, el de 4º de la ESO de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Dentro del tema de las funciones, se han escogido dos subapartados relacionados con estas dos configuraciones. Y por supuesto todos los ejercicios que aparecen en la parte final del tema. (Cólera, 2007e; 106-111,116-117).

$y = k/x$ funtzioaren azterketa

x	y
1	1
2	0,5
3	$0,\widehat{3}$
4	0,25
5	0,20
…	…

x	y
1	1
0,5	2
$0,\widehat{3}$	3
0,25	4
0,20	5
…	…

x-k zeinua aldatzean, *y*-k ere zeinua aldatzen du.



Honako kurba hauek familia berekoak dira:

Figura 5-4. Teoría sobre la función de proporcionalidad inversa en el libro de texto.

Esta es la descripción de los materiales utilizados para la construcción de la unidad didáctica. Al final del trabajo aparecen adjuntas todas las páginas recogidas de los diferentes libros de texto.

Capítulo 6.
Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica.

Después de analizar la unidad didáctica en el libro de texto, se estudian cuales pueden ser las dificultades y errores más comunes entre los alumnos a la hora de realizar el aprendizaje de la misma unidad didáctica.

En las diferentes teorías sobre el aprendizaje de las Matemáticas existe la necesidad de identificar las dificultades y errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, para poder progresar de manera efectiva en el método de enseñanza aprendizaje.

Uno de los objetivos de este trabajo es el de examinar las restricciones cognitivas existentes en el aula. Sabiendo que la experimentación se ha llevado a cabo en un aula de 3º de la ESO diversificación, es previsible que los alumnos estén sujetos a ciertas restricciones cognitivas.

Por lo tanto, a continuación se mostrarán las dificultades y errores previsibles que pueden mostrar los alumnos de 3º de la ESO de diversificación en el estudio de la función.

6.1. Dificultades

Por parte de los alumnos de 3º de ESO diversificación las dificultades que pueden tener a lo largo del aprendizaje de este tema son las siguientes:

- Utilización del Sistema de Ejes Cartesianos. El origen de esta dificultad puede estar en la diferenciación de ambos ejes del sistema así como en la introducción de todos los números reales en el mismo. Además, también surgirán dificultades en la utilización de diferentes escalas en el Sistema de Ejes Cartesianos para la representación de funciones que así lo requieran.

- Entender el concepto de función. Confundir la variable dependiente con la independiente. No hallar la relación funcional que surge entre las dos variables.

- Representación gráfica de los diferentes tipos de funciones. En este caso se presentarán dificultades en funciones lineales, cuadráticas y de proporcionalidad inversa, que son los tipos de funciones con las que se van a realizar la representaciones gráficas. Es previsible que las dificultades sean mayores en las funciones de tipo cuadráticas y de proporcionalidad inversa, ya que las de tipo lineales se han estudiado en cursos anteriores.

- Diferenciación de la expresión algebraica de funciones afines. El origen podría estar relacionado con la no asociación de la expresión algebraica con una recta de pendiente 0.

- Diferenciación de la expresión algebraica de funciones lineales. Dificultad para identificar la pendiente y la ordenada en el origen en una expresión analítica de una función lineal. No asociación de los parámetros m y n con una función lineal.

- Diferenciación de la expresión algebraica de funciones cuadráticas. Dificultad para comprender que todas las funciones cuadráticas con expresión $y = ax^2 + bx + c$ deben tener un parámetro "a" diferente a 0 ($a \neq 0$).

- Diferenciación de la expresión algebraica de funciones de proporcionalidad inversa.

- Representación de funciones lineales o afines sin la ayuda de la construcción de una tabla de valores. No se identifican las características de una función a partir de la expresión algebraica, sin realizar la expresión gráfica (pendiente, ordenada en el origen, etc.).

- Resolución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de la representación gráfica de funciones lineales o afines. La dificultad propiamente surge en la representación de dichas funciones.

6.2. Errores y su posible origen

De la misma forma, se prevé que los alumnos realicen errores en el aprendizaje de este tema. A continuación se realiza un breve repaso a los errores previsibles de los alumnos:

- Confundir los dos ejes del Sistema de Ejes Cartesianos, confundir el eje de abscisas con el eje de ordenadas.

- Imprecisión a la hora de representar los puntos. Imprecisión a la hora de representar los dos ejes del sistema, imprecisión en la perpendicularidad de ambos.

- Confusión y errores frecuentes en la representación de puntos con números racionales en el Sistema de Ejes Cartesianos.

- Confundir la parte positiva y negativa de cualquiera de los dos ejes del Sistema de Ejes Cartesianos

- Realizar la representación gráfica de diferentes tipos de funciones (generalmente con las rectas) solo en el primer cuadrante, de manera que parecen finitas.

- Realizar las representaciones gráficas de las funciones indicando solo los valores calculados en la tabla, de manera que parecen funciones finitas.

- Cálculo incorrecto de puntos cuando a la variable x se le proporcionen valores negativos.

- Identificación incorrecta de la variable dependiente y la variable independiente.

- Errores en la interpretación de las dos variables funcionales.
- Mala asociación de expresiones algebraicas con expresiones gráficas.

Estos son los errores previsibles que los alumnos pueden realizar en el estudio del tema. El origen de estos errores estará en las dificultades que se han definido en el apartado anterior.

6.3. Diversificación

Además de las dificultades y errores que pueden cometer los alumnos en el estudio de esta unidad didáctica, se debe prever la diferencia del grupo con el que se ha llevado a cabo la docencia. Es un grupo de diversificación, y por lo tanto es un grupo que tendrá ciertas peculiaridades. Es muy importante que se tomen en cuenta estas diferencias a la hora de exponer la unidad.

Los programas de diversificación curricular son una medida de atención a los alumnos que presentan dificultades en su proceso de aprendizaje. El objetivo principal es que los alumnos que accedan a dichos programas consigan el título de "Graduado en Educación Secundaria". Para poder describir más o menos como es el grupo con el que se ha realizado la docencia vamos a mostrar brevemente lo que el Departamento de Educación y Cultura del Gobierno de Navarra dice sobre los alumnos que vayan a cursar el programa de diversificación curricular:

"Artículo 2. Definición de los Programas de diversificación curricular.

1. *Los Programas de diversificación curricular son medidas de atención a la diversidad que los centros educativos podrán implantar, de manera flexible, en función de las necesidades del alumnado y en el uso de la autonomía de gestión de los recursos asignados, en los cursos tercero y cuarto de la ESO. Estos programas sustituyen a determinadas medidas organizativas de atención a la diversidad existente, actualmente, para dichos cursos.*

2. *Los Programas de diversificación curricular están dirigidos al alumnado que, tras la preceptiva evaluación, presente una actitud positiva ante el estudio, se confirmen sus evidentes dificultades de índole pedagógica para obtener el título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria y que, con una organización curricular diferente a la ordinaria, tenga expectativas de conseguir el mencionado título.*

3. *Los Programas de diversificación curricular tendrán una metodología específica a través de una organización de contenidos, actividades prácticas y materias del currículo diferente a la establecida con carácter general para alcanzar los objetivos y las competencias básicas de la etapa y, por consiguiente, el título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria.*

Artículo 3. Requisitos para la incorporación.

1. *Podrá incorporarse a un Programa de diversificación curricular de tercer curso de la ESO aquel alumnado que, respondiendo al perfil citado, se encuentre en alguna de las siguientes condiciones:*

    1. *Haber cursado segundo de ESO, no estar en condiciones de promocionar a tercero de ESO y haber repetido ya una vez en la etapa.*

    2. *Haber cursado tercero de ESO por primera vez, no haber repetido en la etapa y no estar en condiciones de promocionar a cuarto de ESO.*

2. *Podrá incorporarse a un Programa de diversificación curricular de cuarto curso de la ESO aquel alumnado que, respondiendo al perfil citado, se encuentren en alguna de las siguientes condiciones:*

    1. *Haber cursado tercero de ESO, haber repetido en la etapa y no estar en condiciones de promocionar a cuarto de ESO.*

    2. *Haber cursado cuarto de ESO y no estar en condiciones de obtener el título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria.*

3. *En todo caso, la incorporación de un alumno o alumna a un Programa de diversificación curricular se realizará una vez oído al propio alumno y a su familia y requerirá la evaluación tanto académica como psicopedagógica, así como la intervención del Departamento de Educación".* (Gobierno de Navarra, 2007).

En principio estos alumnos han encontrado dificultades generalizadas de aprendizaje (lo que les lleva a tener asignaturas pendientes de otros años), y además presentan un riesgo evidente de no alcanzar el Graduado de Educación Secundaria. Por lo tanto la experimentación se encuentra frente a un grupo muy diverso, falto de atención, falto de motivación, problemas extra escolares, restricciones cognitivas, etc., que destacan en este grupo.

En la docencia del tema de funciones con este grupo de 3º de la ESO diversificación, se combinan una parte teórica y una parte práctica donde se intenta que los estudiantes tengan la mayor participación posible, y además, diariamente (exceptuando algún caso muy concreto), se les exigirá que realicen la tarea para casa, con la cual trabajarán los diferentes aspectos estudiados en clase. Este grupo, le exige al profesor tener mucha dedicación con cada uno de los alumnos y trabajar para que cada uno de ellos esté realizando el trabajo exigido.

Es cierto que la materia que se imparte en este tipo de grupos, no llega al nivel de los conceptos tratados en un aula ordinaria de 3º de la ESO, por lo tanto, a los alumnos de diversificación se les exige que realicen sin excepción alguna otro tipo de compromisos. De todo ello, se hablará en el siguiente capítulo.

Una característica muy importante de las clases de diversificación es que además de ser muy diferentes a las aulas ordinarias, los alumnos que componen estas clases son muy diferentes entre ellos, formando una clase muy heterogénea.

Se han elegido los casos de dos alumnos en concreto, ya que las personalidades de cada uno de ellos van a proporcionar información, con la cual se puede llegar a entender la situación de una clase de diversificación.

Uno de los dos alumnos (alumno A) es un chico de 15 años, que habiendo repetido un curso y viendo el seguimiento que ha llevado los últimos años, se ha metido en el programa de diversificación. Es un chico revolucionado, con un carácter muy fuerte. No tiene buena actitud en clase, parece que no le interesa lo que se está estudiando en las sesiones, por supuesto no realiza nunca las tareas obligatorias para casa, no trae a clase el material necesario, hace lo que le apetece y cuando le apetece. Su tono de voz es siempre muy alto, además siempre que participa en clase es para algo que no tiene nada que ver, con lo cual con su actitud también perjudica al resto de los alumnos. Al contrario que su actitud, tiene una gran facilidad para desarrollar los conocimientos de las matemáticas, en un tiempo mucho más reducido que el resto de los alumnos consigue interiorizar los contenidos requeridos en cada momento.

El otro alumno (alumno B) también es un chico de 15 años que habiendo repetido un curso ha decidido introducirse en el programa de diversificación. En este caso, la actitud del alumno es totalmente contraria a la del alumno A. Es un chaval muy majo, respetuoso con sus compañeros y con el profesor, atiende en clase, realiza la tarea de casa, trae el material y además de una manera ordenada y formal, pregunta cuando no entiende, etc. Lo que ocurre es que no logra entender casi ninguno de los contenidos. Cuando se realiza la explicación parece que lo entiende pero cuando se les deja con el trabajo autónomo y se observan sus resultados queda reflejado que este chico no entiende casi nada.

Después de haber realizado la docencia del tema de las funciones, los resultados del cuestionario marcan que el alumno A ha superado los requisitos de los contenidos marcados y el alumno B no. La cuestión es, ¿Son estos los requisitos necesarios para superar lo marcado en el programa de diversificación?

Si se retrocede a los artículos marcados unos párrafos más atrás, se observa que uno de ellos aclara que para la introducción de estos alumnos en este programa concreto debe haber presente una actitud positiva hacia el estudio y se confirmen sus evidentes dificultades de índole pedagógica. Con lo cual, ¿debería estar el alumno A en el programa de diversificación?

Capítulo 7.
El proceso de estudio.

Para comenzar a tratar sobre el proceso de estudio en el aula, hay que remarcar, aunque ya ha sido comentado varias veces a lo largo del texto, que el periodo de docencia se ha realizado exponiendo el tema de funciones a alumnos de 3º de ESO Diversificación.

7.1. Distribución del tiempo de la clase

Antes de comenzar el periodo de sesiones referidas a la instrucción del tema, se ha previsto realizar 12 sesiones además de otra sesión adicional para realizar un examen con las que se estima poder acabar con todas las nociones requeridas. Finalmente se realizan 14 sesiones mas una adicional para el examen. Pero hay que tener en cuenta también que una de las sesiones se utiliza para la realización del examen del tema anterior (resolución de sistemas de ecuaciones).

Semanalmente se realizan 3 ó 4 sesiones de matemáticas. Siendo un grupo de diversificación, tienen 7 horas semanales para las asignaturas de ciencias, 3 horas las dedican a las matemáticas y otras 3 las dedican a las ciencias naturales (Física-Química y Biología-Geología). La hora restante se va alternando cada semana, una semana para matemáticas, la siguiente semana para ciencias naturales, y así sucesivamente. Además, cada clase tiene una duración de 55 minutos, aunque realmente, en todas las sesiones se dedican 5 minutos a que todos los alumnos se sienten y a observar quienes de ellos han realizado la tarea y a apuntarlo cuando no lo hayan hecho. Por lo tanto se puede decir que la duración de las sesiones se reduce a 50 minutos.

Debido a que es un grupo de diversificación, gran parte de los alumnos tienen un grado muy alto de desconcentración o falta de atención. Para evitar esta falta de atención, las sesiones deberán tener dos partes, una de teoría y otra de práctica.

La parte de teoría, no debe alargarse más de 10-15 minutos (previendo la falta de atención de los alumnos), además en este tiempo se incluyen también las correcciones de la tarea que se haya enviado para casa. Para procurar ayudar en la mayor parte posible a la falta de atención de los alumnos, se intentará la participación de ellos en la clase, siendo una docencia mas dialógica, habiendo una comunicación entre el docente y el estudiante, realizándoles preguntas ó opiniones frecuentemente, sacándolos a la pizarra, etc.

En la parte práctica, se les exigirá un trabajo autónomo para poner en práctica lo aprendido en la parte teórica. De vez en cuando se les dejará ponerse en parejas para resolver algunas cuestiones ó incluso para que las debatan entre ellos.

En la tabla 7-1, se observa cual ha sido la distribución del tiempo en el aula durante el periodo en el que se ha realizado la docencia de la unidad didáctica:

DESCRIPCIÓN	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Sistema de ejes Cartesianos: Definición y exposición del sistema. Ejercicios. Únicamente utilización de números enteros.	**Sesión 1:** Teoría: 15 mins. Práctica: 35 mins.	Teoría: Profesor Práctica: Compartida	Magistral en la parte teórica y grupal en la práctica
Repaso de la clase anterior y explicación de su utilización con números racionales. Ejercicios.	**Sesión 2:** Teoría: 10 mins. Práctica: 40 mins.	Teoría: Compartida. Práctica: Alumno.	Dialógica en la parte teórica e individual en la parte práctica
Concepto de función: Relación, denominación e interpretación de las variables funcionales. Diferentes expresiones funcionales. Características en expresión gráfica: Máximos, mínimos, crecimiento, etc. Ejercicios	**Sesión 3:** Teoría: 20 minutos (dividida en dos momentos de clase, 10' + 10'). Práctica: 30 mins.	Teoría: Profesor. Práctica: Alumno.	Magistral en la teoría e individual en la práctica.
Sistema de ejes Cartesianos: Repaso de conceptos estudiados. Ordenador *Funciones lineales:* Presentación. Expresión Algebraica y en tabla de valores. Ejercicios.	**Sesión 4:** Teoría: 15 mins (dividida en dos momentos de clase, 5' + 10'). Práctica: 45 mins.	Teoría: Profesor y compartida. Práctica: compartida.	La teoría se expuesto de mara magistral y dialógica. Los ejercicios con ordenador se han realizado de manera grupal y los demás de forma individual. Se ha utilizado el programa de GeoGebra.
Funciones lineales: Diferentes expresiones, algebraica, tabla de valores, grafica. Representaciones graficas. Características. Ejercicios.	**Sesión 5:** Teoría: 10 mins. Práctica: 40 mins.	Teoría: Profesor. Práctica: Alumno.	Clase teórica magistralmente y práctica por parejas.

DESCRIPCIÓN	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Examen de sistemas de ecuaciones lineales (tema anterior): Relacionado con el tema de funciones.	**Sesión 6:** Examen.	Alumno	Individual
Funciones lineales: Diferenciación entre funciones lineales, de proporcionalidad y afines. Características. Ejercicios. *Funciones cuadráticas:* Diferentes expresiones, algebraica, tabla de valores, grafica. Representaciones graficas. Ejercicios.	**Sesión 7:** Teoría: 15 mins. Práctica: 35 mins.	Teoría: Profesor. Práctica: Alumno.	Clase teórica magistralmente y práctica por parejas.
Funciones cuadráticas: Representaciones gráficas. Ejercicios.	**Sesión 8:** Teoría: 10 mins. Práctica: 40 mins.	Teoría: Compartida. Práctica: Compartida	Toda la sesión ha sido dialógica.
Repaso general de conceptos anteriores. Teoría y ejercicios.	**Sesión 9:** Teoría: 10 mins. Práctica: 40 mins.	Teoría: Compartida. Práctica: Alumno.	Dialógica en la parte teórica e individual en la parte práctica
Función de proporcionalidad inversa: Representaciones gráficas a partir de la construcción de tabla de valores. Ejercicios.	**Sesión 10:** Teoría: 10 mins. Práctica: 40 mins.	Teoría: Profesor. Práctica: Compartida.	Magistral en la parte teórica y grupal en la práctica
Función de proporcionalidad inversa: Representaciones gráficas a partir de la construcción de tabla de valores y a partir de desplazamientos de otra expresión gráfica. Ejercicios.	**Sesión 11:** Teoría: 10 mins. Práctica: 40 mins.	Teoría: Profesor. Práctica: Alumno.	Magistral e individual.

DESCRIPCIÓN	TIEMPO	RESPONSABLE	TIPO DE DOCENCIA
Función lineal: Análisis de la expresión algebraica, pendiente y ordenada en el origen. Representación sin tabla de valores. Ejercicios.	**Sesión 12:** Teoría: 20 mins. Práctica: 35 mins.	Teoría: Profesor. Práctica: Alumno.	Magistral e individual.
Resolución de sistema de ecuaciones mediante las funciones. Ordenador. Ejercicios.	**Sesión 13:** Teoría: 10 mins. Práctica: 40 mins.	Teoría: Profesor. Práctica: compartida	La teoría se expuesto de mara magistral. Los ejercicios con ordenador se han realizado de manera grupal y los demás de forma individual. Se ha utilizado el programa de GeoGebra.
Repaso general de conceptos anteriores. Ejercicios	**Sesión 14:** Práctica: 50 mins.	Práctica: Alumno.	Docencia individual, con la ayuda personalizada del profesor.
Examen	**Sesión 15:** Examen	Alumno	Individual

Tabla 7-1. Descripción de la distribución del tiempo en las sesiones.

7.2. Actividades adicionales planificadas

El grupo con el que se ha trabajado, es un grupo de 3º de la ESO de diversificación, lo que quiere decir, que tal y como se ha mostrado previamente, los contenidos que se estudian no son los mismos que los de un aula de 3º de la ESO ordinaria.

Las actividades que se han planteado a lo largo de este periodo han sido expuestas en la pizarra o en diferentes fichas. La razón por la que se han utilizado estos soportes físicos es que se ha tenido que recurrir a varios libros de texto como referencia. No se ha utilizado un único libro, se han adquirido diferentes apartados de diferentes libros y posteriormente se han utilizado estos en soportes como la ficha o la pizarra. Concretamente, se han utilizado los libros de texto de 1º de la ESO, 2º de la ESO, 3º de la ESO y de 4º de la ESO, dependiendo del contenido que se quisiera trabajar.

Se han combinado los dos soportes físicos mencionados, la pizarra y la ficha ya que cada una de las opciones proporciona diferentes características.

En el caso de la pizarra, es cierto que este sistema facilita al docente una mayor flexibilidad a la hora de exponer los ejercicios o actividades. Por un lado, si el profesor observa que un ejercicio no ha salido como se esperaba puede repetir cuantas veces quiera ejercicios parecidos (o al revés, introducir ejercicios más complejos si se observa mucha facilidad en la realización de los mismos). Por otro lado, los grupos de diversificación son muy heterogéneos, habiendo mucha diferencia entre unos alumnos y otros. Por lo tanto este sistema también facilitará poder poner ejercicios extra a los alumnos que tengan mayor facilidad.

En el caso de las fichas, hay que decir que, ya que, los alumnos carecen de un libro de texto con los contenidos que ellos tratan, es una manera de que también puedan tener un material ordenado con el que luego puedan trabajar de manera autónoma.

En el periodo del estudio de la función, se ha trabajado con 3 fichas diferentes. Cada una de ellas con diversos ejercicios. A continuación se muestran capturas de las 3 fichas utilizadas:

Ficha 1:

- Título de la ficha**:** Funciones – Sistema de Ejes Cartesiano – 3º Diversificación.
- Descripción**:** La ficha contiene dos ejercicios relacionados con el Sistema de Ejes Cartesianos. En uno de ellos se proponen puntos expresados en coordenadas y se deben representar gráficamente. En el otro se debe realizar lo contrario, hallar las coordenadas de unos puntos expresados gráficamente. A continuación se muestra uno de ellos:

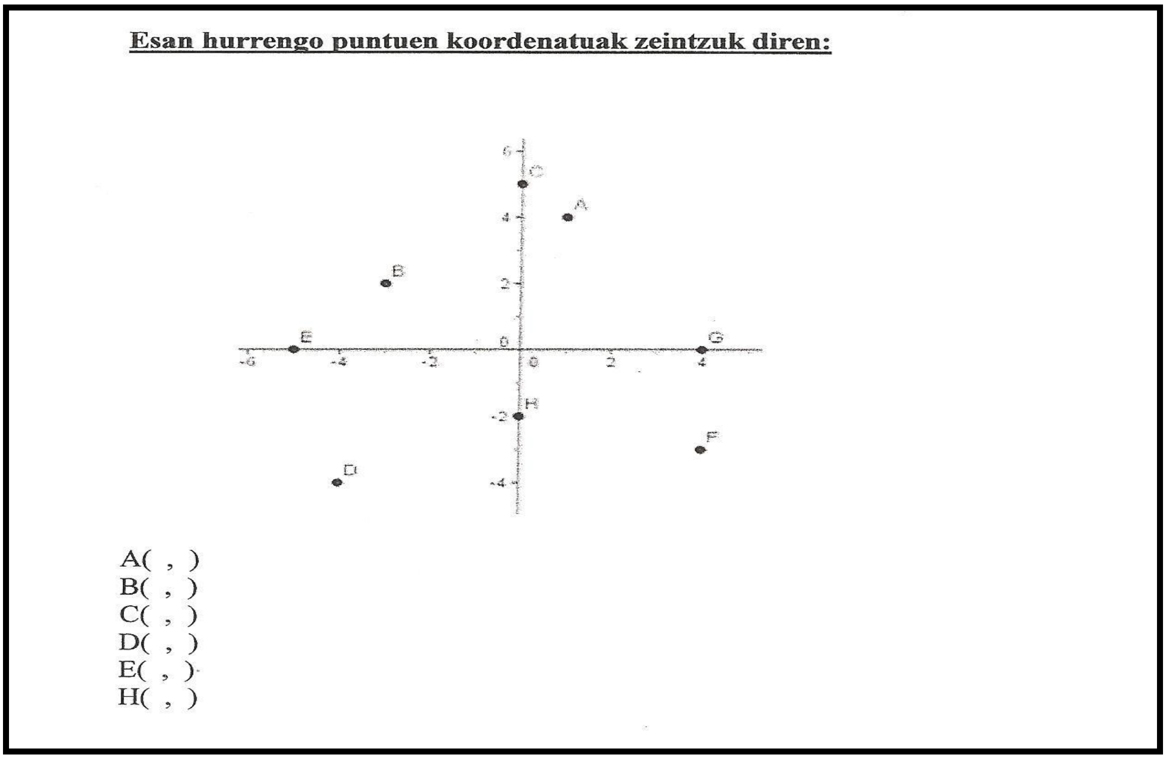


Figura 7-1. Ejercicio con el Sistema de Coordenadas Cartesianas.

Ficha 2:

- Título de la ficha: Funciones – 3º Diversificación.

- Descripción: Ficha utilizada después de realizar las sesiones 3, 4 y 5. Existen tres ejercicios. Dos de ellos para practicar los conceptos y características de la función y otro de ellos expresamente para realizar representaciones gráficas de funciones lineales. A continuación se muestra uno de ellos:

FUNTZIOAK.- 3 DIB

1. ARIKETA. Hurrengo grafikoetatik zeintzuk irudikatzen dute funtzio bat?

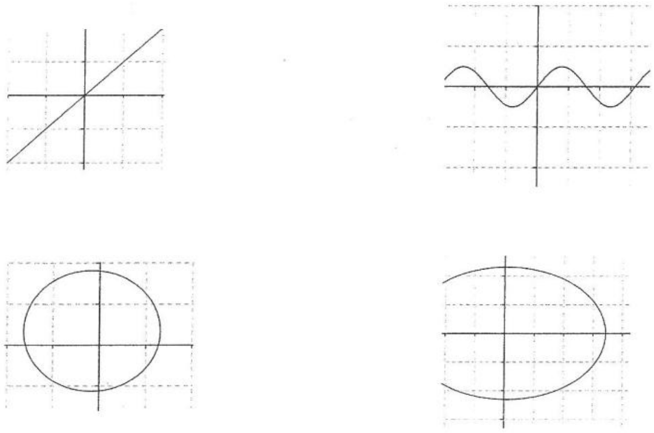


Figura 7-2. Ejercicio con el concepto de función.

Ficha 3:

- Título de la ficha: Funciones 2 – 3º Diversificación.

- Descripción**:** Una vez realizada la docencia de todos los contenidos se utiliza esta ficha para realizar un repaso general. Aparecen ejercicios diferentes: Un ejercicio donde se deben asociar expresiones algebraicas y gráficas. Los demás ejercicios están relacionados con representaciones gráficas de las funciones. Un ejemplo:

2. ARIKETA. Irudikatu hurrengo funtzioak eta esan ezazu zein motakoak diren:

a) $Y = x + 6$
b) $Y = 5x – 10$
c) $Y = -100x + 100$
d) $Y = x^2 + 4x – 4$
e) $Y = -x^2 + 5$
f) $Y = -x^2 -2x + 4$
g) $Y = 2x^2 - 4x – 2$
h) $Y = 12 / x$
i) $Y = 15 / x$
j) $Y = 1 / x$

Figura 7-3. Ejercicio de representación de funciones.

El planteamiento general de aprendizaje se ha realizado en base a la pizarra y las fichas, pero también se han planificado actividades adicionales complementarias utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra.

Este aplicativo no ha sido utilizado para impartir materia o conceptos nuevos, sino para reforzar los que ya se han trabajado previamente con los otros soportes físicos ya mencionados.

Además estas sesiones con este software sirven para realizar una comparativa entre dos tipos de docencia diferente. La primera realizada mediante la ayuda de la pizarra o en su caso con una ficha, donde la sesión es de tipo magistral, y la segunda realizada con el apoyo del software mencionado.

Para ello se analizan diferentes cuestiones dentro de cada sesión, tales como la motivación y atención del estudiante, obtención de objetivos previstos, limitaciones de cada sistema, etc.

Para empezar hay que describir cuales han sido y como se han llevado a cabo las dos sesiones con el software de GeoGebra.

Práctica con GeoGebra 1: Coordenadas Cartesianas.

Esta primera práctica con GeoGebra se ha realizado en la sesión número 4 (observar tabla 7-1). El tiempo dedicado ha sido de aproximadamente 30 minutos. Hay que decir que no se ha realizado ningún tipo de docencia teórica sino que se han realizado dos ejercicios con los conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores.

Esta práctica con el programa es grupal, es decir, un único ordenador proyectado en la pared de clase.

En uno de los dos ejercicios, se muestra una imagen donde aparece un gráfico con sus dos ejes y las unidades de escala en cada uno de ellos. El profesor, que es el que maneja el ordenador, va haciendo aparecer en la imagen diferentes puntos, y posteriormente los hace desaparecer. Los alumnos establecen un orden para ir respondiendo uno a uno y si uno falla se le contabiliza. Los puntos aparecerán cada vez más rápido, con lo cual, para que los alumnos respondan correctamente deben tener bien interiorizados todos los conceptos. Se realiza el juego varias veces cambiando las características un poco: solo números enteros, números racionales, en vez de jugar todos los alumnos juegan uno contra otro, etc.

El otro ejercicio es para realizar individualmente y con la ayuda de una ficha que se les facilita. Únicamente se les va proporcionando puntos como en el juego anterior, pero en este caso deben copiarlos exactamente igual que en la proyección además de indicar las coordenadas de cada uno. Para ello también tendrán un tiempo limitado. A continuación se muestra la ficha facilitada para realizar este segundo ejercicio:

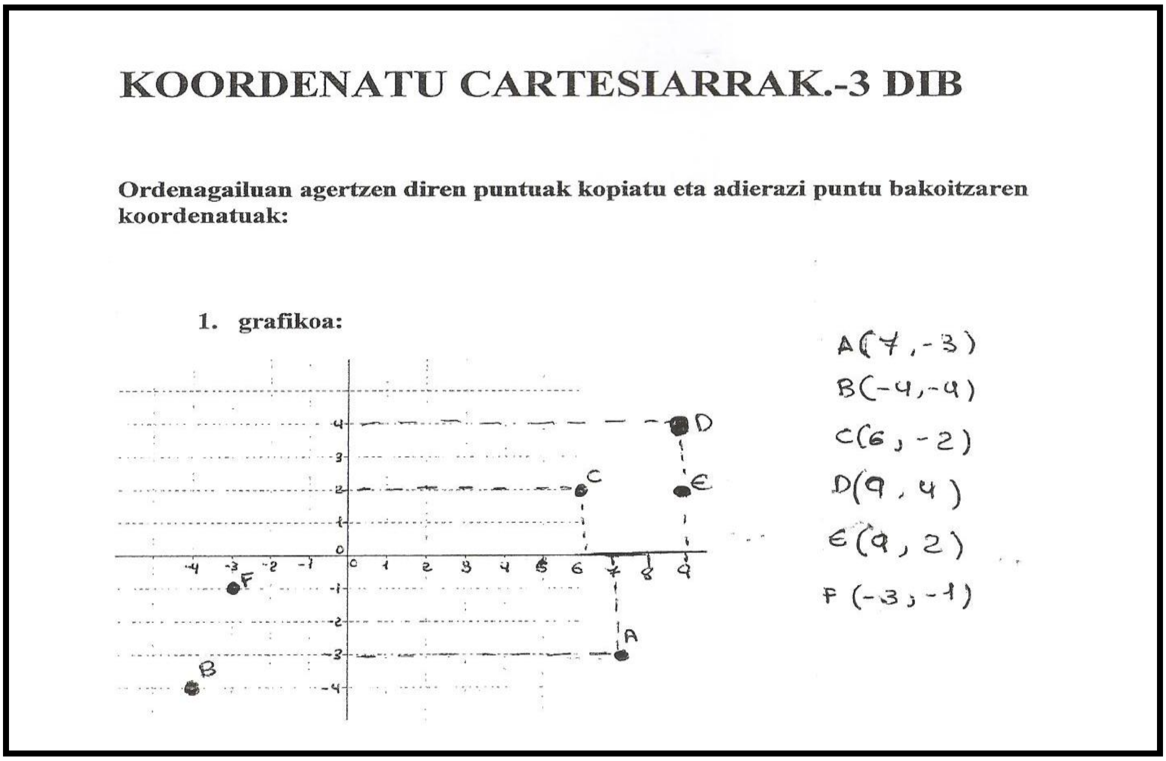


Figura 7-4. Ficha de ayuda para los alumnos en la primera sesión de GeoGebra.

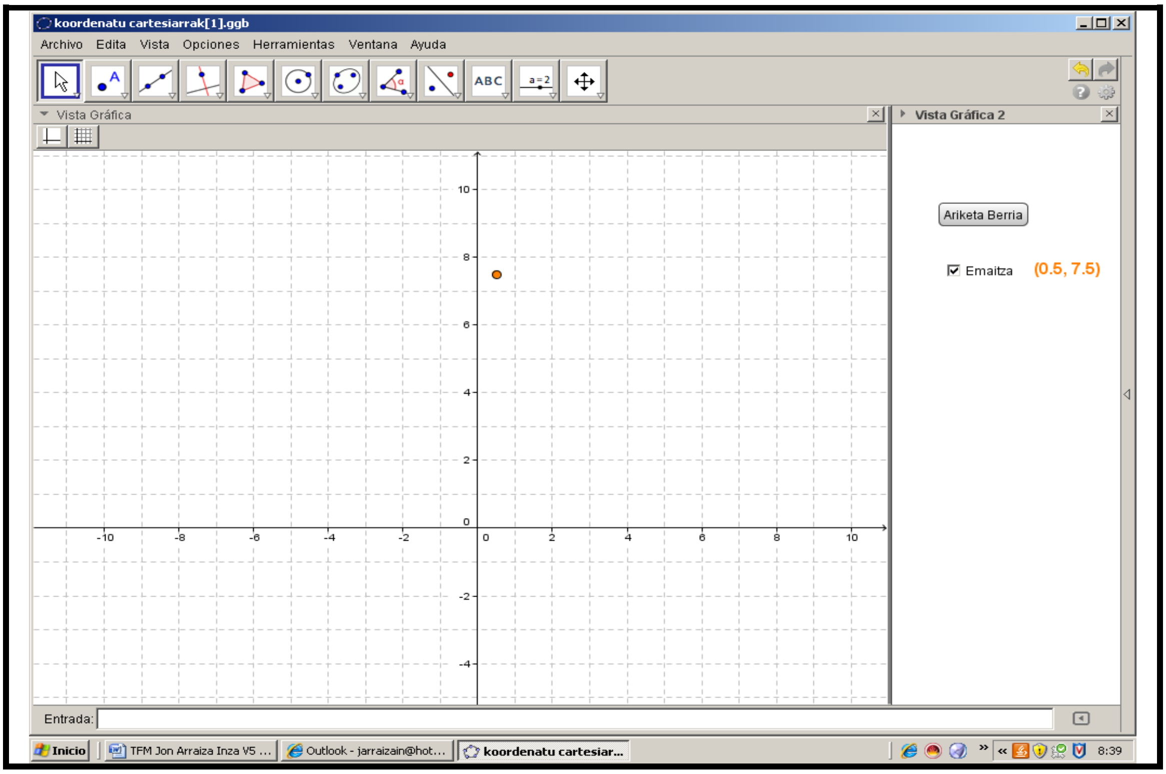


Figura 7-5. Imagen del software, ejercicio de coordenadas cartesianas.

Práctica con GeoGebra 2: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con funciones.

La segunda práctica con GeoGebra se realiza en la sesión 13. Se quiere llegar a relacionar el tema visto anteriormente por los alumnos (resolución de sistemas de ecuaciones) con el de las funciones. Es lo que se ha previsto, pero finalmente y debido a las restricciones de los alumnos, solo se han podido exponer conceptos relacionados con la representación gráfica.

Para ello previamente se realiza un repaso de lo estudiado en la clase anterior: como representar una función lineal sin la ayuda de una tabla de valores (pendiente, ordenada en el origen, etc.).

Posteriormente se abre el programa y aparece un gráfico con sus dos ejes además de las funciones y = x e y = -x, o lo que es lo mismo, el gráfico dividido en 8 cuadrantes. Lo que nos permite el programa es ver qué ocurre gráficamente cuando realizamos variaciones en los parámetros m y n de la expresión analítica.

La sesión se convierte en un desconcierto para los alumnos, no comprenden bien los cambios que se producen en ambas expresiones y no los relacionan. Esto queda reflejado en el ejercicio posterior donde se les pide que realicen un ejercicio parecido pero con bolígrafo y papel.

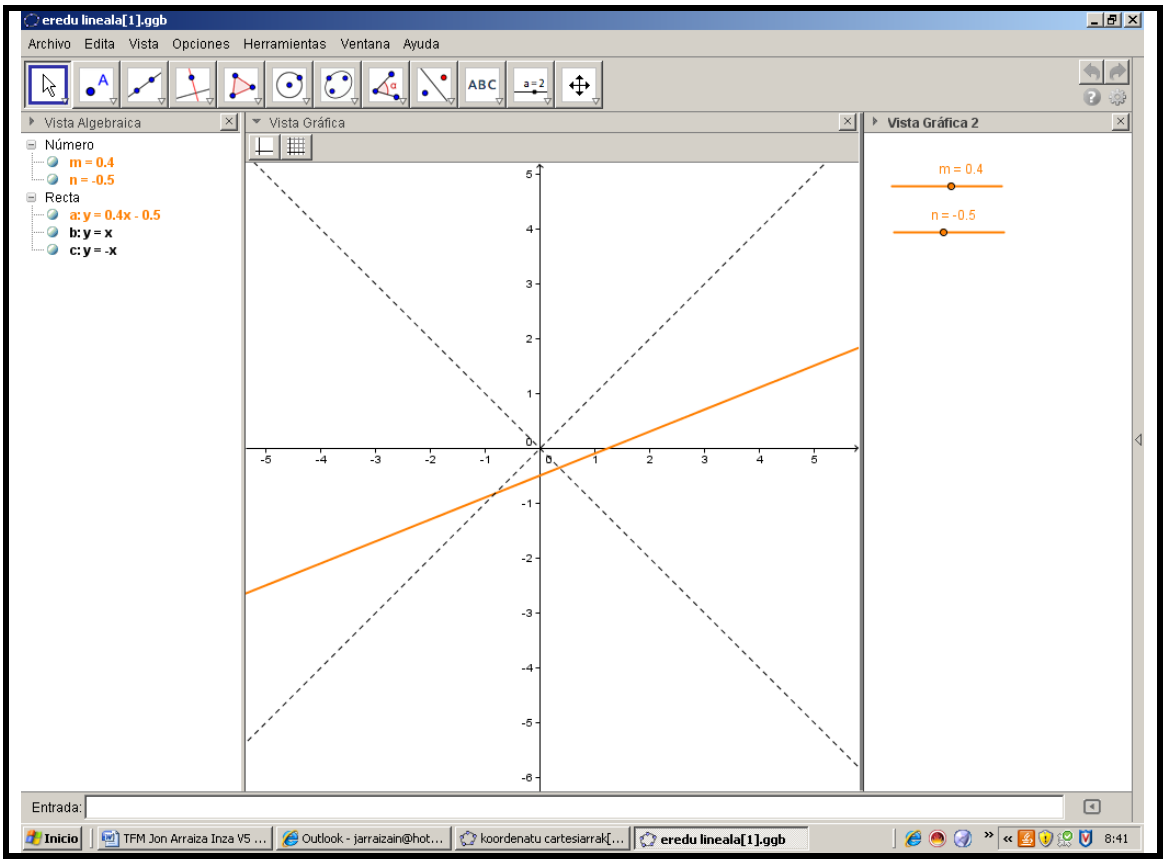


Figura 7-6. Imagen del software, análisis de funciones lineales.

En investigaciones diversas sobre este tipo de medios tecnológicos, ya ha sido demostrado que un software como el de GeoGebra, utilizado en los momentos convenientes adopta unos resultados muy exitosos.

El texto "Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demostrative moments" afirma además que la pertinencia del uso de este software es recomendable en tres tipos de situaciones: exploración, demostración inductiva (ausencia de contraejemplos) y demostración deductiva. (Lasa, 200X).

Afirmado esto último y después de haber expuesto las dos prácticas con el GeoGebra, hay que valorar si ha sido adecuado introducir este soporte físico para realizar las actividades descritas, si lo ha sido únicamente para algunos alumnos, o si únicamente ha sido correcto en determinados casos.

Se han realizado dos sesiones con el programa y los resultados obtenidos de cada una de las sesiones son totalmente antagónicos.

En la sesión con el Sistema de Ejes Cartesianos, el 100% de los alumnos han logrado una atención no adquirida en ninguna de las otras 14 sesiones, la motivación de estos ha sido máxima, los conceptos han quedado muy claros lo que ha permitido realizar en el mismo tiempo muchos más ejercicios (comparado con el papel o la pizarra), la sensación del docente ha sido mucho mejor.

En cambio en la segunda sesión con GeoGebra ha ocurrido todo lo contrario. Tanto la atención como la motivación ha sido muy bajas, los conceptos no se han entendido, no se ha podido realizar la docencia o la ejecución de todos contenidos preparados para la práctica, ha ocurrido justo lo contrario a la otra sesión.

¿Qué es lo que ha ocurrido para que exista una diferencia tan pronunciada? La razón por la que ha ocurrido esto lo va a determinar el esquema de acción instrumentada. Para que un aplicativo como GeoGebra pueda tener éxito, además del propio software, es necesario que los alumnos tengan en su dominio ciertos conocimientos.

Si se realiza un símil con el aprendizaje de la escritura se entenderá mejor. Para que un alumno pueda escribir, además del soporte físico, que en este caso sería el lápiz, debe tener introducidas unas nociones. Estas concretamente serían la gramática, el alfabeto y el lenguaje. De esta manera, con todo el esquema de acción instrumentada en su dominio el alumno será capaz de escribir.

Lo que ocurre en las dos sesiones de GeoGebra es que en ambas se tiene el soporte físico (este caso sería el software), pero no se poseen las nociones necesarias para completar el esquema de acción instrumentada. En el siguiente esquema se observa lo ocurrido en ambas sesiones.

GGB + Contenidos asimilados:
- Plano Cartesiano
- Ejes X, Y

ÉXITO con la primera sesión.

GGB + Contenidos no asimilados:
- Funciones lineales
- Parámetros m y n
- pendiente, ordenada en el origen

FRACASO con la segunda sesión.

7.3. La tarea: Actividad autónoma de los alumnos prevista

Tal y como se ha comentado previamente, las clases disponen de dos partes fundamentales.

Una de ellas consiste en la práctica específica del alumno o lo que es lo mismo la tarea autónoma del estudiante. La actividad autónoma recoge, además, todas las actividades, ejercicios y demás que se mandan para trabajar en casa.

La actividad autónoma, en un grupo como el de diversificación adopta mucha importancia. Con el trabajo en casa normalmente el objetivo más profundo es que los alumnos profundicen en los conceptos, que con la repetición de algunos ejercicios o prácticas, adopten una mejor capacidad para elaborar los objetivos buscados. En el caso del grupo que estamos analizando, con el trabajo autónomo se ha buscado un segundo objetivo, que tiene la misma o mayor relevancia que el anterior. Concretamente se busca la autonomía del estudiante, que sea capaz de realizar los ejercicios diariamente y que encuentre sentido a ese trabajo autónomo.

Por todo ello el trabajo autónomo que deben realizar en casa es diario (exceptuando algunos casos). El tiempo requerido ha sido pequeño, pudiendo realizar esta tarea en aproximadamente 20 minutos, pero de esta manera se les fuerza a coger la costumbre de abrir los libros en casa, de tener trabajo pendiente, etc.

Esta tarea será valorada con un 10% en la nota final del trimestre, por ello diariamente se realiza un seguimiento de la tarea realizada por todos los alumnos.

Por otro lado hay que comentar en este apartado también, que generalmente estos alumnos tienden a ser muy poco cuidadosos con sus libros, con sus apuntes, no son ordenados, etc., y por lo tanto se valora con otro 10% la forma en que tienen organizado el cuaderno (limpieza y orden), si traen el material a clase, puntualidad, etc.

Se les dan muchas facilidades para obtener puntos, pero lo que ocurre es lo contrario. En esta experimentación el trabajo autónomo en casa ha sido mínimo, solo unos pocos alumnos han realizado la tarea con frecuencia, y en cuanto al orden y limpieza lo mismo. Se les explica que durante el periodo debían traer todos los días una regla. No ocurre. Muchas faltas.

Capítulo 8. Experimentación.

En el siguiente capítulo se va a mostrar la experimentación llevada a cabo con un grupo de alumnos. Se analizará profundamente el examen o cuestionario realizado por estos, después de haber cumplido con el periodo de aprendizaje para el tema en cuestión. Para ello este análisis está fundamentado en diferentes apartados que se encontrarán a lo largo de este capítulo.

En el primer apartado, se describe la muestra con la que se ha realizado la experimentación y además se realiza un pequeño repaso al diseño de la experimentación, analizando cual ha sido el proceso de estudio.

A continuación se describe el cuestionario, en donde se profundiza en los tres aspectos más importantes del mismo: Dimensión epistemológica (que contenidos son los que se están tratando en el cuestionario), dimensión cognitiva (referido a los conocimientos del estudiante) y dimensión de enseñanza (los aspectos por los que el profesor ha decidido poner unos ejercicios y no otros).

Finalmente se concluye el capítulo con los resultados, en donde se analizan las diversas respuestas dadas por los alumnos.

8.1. Muestra y diseño de la experimentación

La docencia se ha llevado a cabo en un instituto de uno de los numerosos barrios de Pamplona. En este instituto público se realiza el trabajo docente únicamente en Euskera, es decir, solo está implantado el modelo D, por lo tanto, aunque este trabajo y experimentación aparezca descrito en Castellano, la información de la muestra y base de todos los datos se ha realizado en Euskara.

En este centro se ofertan servicios para la formación en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Actualmente cuenta con un total de 570 alumnos y alumnas, concretamente 403 son estudiantes de ESO y 167 son estudiantes de Bachillerato. El instituto cuenta con 67 profesores, todos ellos impartiendo docencia en ESO y Bachillerato obviamente.

El perfil general del alumnado es de una edad de entre 12 y 18 años, de clase social media y el número de varones es similar al de mujeres.

El grupo concreto con el que se ha realizado la experimentación es un grupo de 3º de la ESO del instituto. Concretamente es un grupo de 3º de ESO diversificación formado por 13 alumnos, 2 chicas y 11 chicos. Dado que es un grupo de diversificación, para conocer las características más importantes de este grupo deberíamos recurrir al apartado 6.3., donde se ha definido con precisión este tipo de modalidad.

8.2. El cuestionario

Después de 14 sesiones para realizar la enseñanza del tema de las funciones con este grupo de 3º de diversificación, se realiza una sesión adicional para que los mismos alumnos realicen un examen escrito. Este examen contiene 4 cuestiones diferentes que engloban los diferentes contenidos estudiados durante el periodo de la docencia.

A continuación se muestra la traducción del examen realizado por todos los alumnos de la clase de tercero de ESO diversificación de este centro, posteriormente estará adjunto la versión original del examen en Euskara:

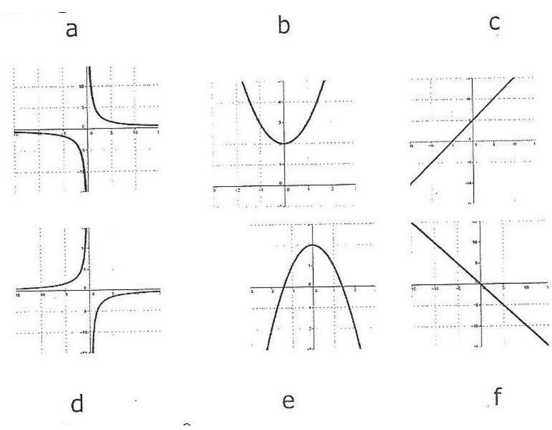
1. Representa las siguientes funciones (5,5 puntos):

a) $y = -2x + 3$
b) $y = 4x - 5$
c) $y = -x^2 + 3$
d) $y = x^2 - 2x + 1$
e) $y = -6$
f) $y = 2x^2 - 3$
g) $y = -x^2 + x - 2$

2. Representa la función $y = -\frac{10}{x}$ **construyendo una tabla. Después, y en este caso sin la ayuda de una tabla (por desplazamiento) representa las siguientes gráficas (2 puntos):**

a) $y = -\frac{10}{x+3}$ b) $y = -\frac{10}{x-5}$ c) $y = -\frac{10}{x-2} + 4$

3. Relaciona las siguientes gráficas con una de las funciones (1 punto):



1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = -\frac{8}{x} + 3$; 3) $y = x - 5$; 4) $y = x^2 + 2$; 5) $y = x$;

6) $y = -x^2 + 2$; 7) $y = -\frac{8}{x}$; 8) $y = x + 5$; 9) $y = x^2 - 2$; 10) $y = -x$

11) $y = -x^2 - 2$

4. Representa esta función y sus asíntotas construyendo una tabla (1,5 puntos):

$$y = \frac{20}{x-4} + 1$$

Figura 8-1. Cuestionario traducido al castellano.

[Ikasle izena] [Taldea] 3.Diber

1. Irudikatu ondorengo funtzioak: 5,5 puntu

$a) y = -2x + 3$

$b) y = 4x - 5$

$c) y = -x^2 + 3$

$d) y = x^2 - 2x + 1$

$e) y = -6$

$f) y = 2x^2 - 3$

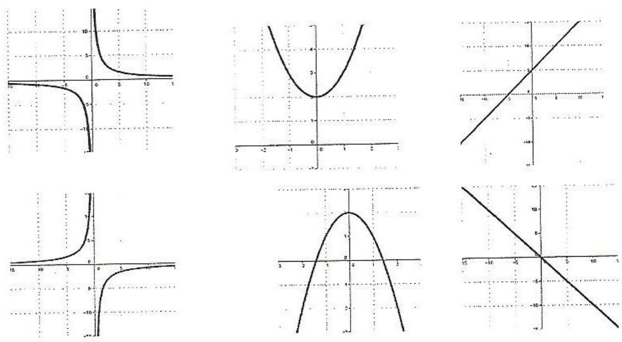
$g) y = -x^2 + x - 2$

2. Irudikatu taula eginez ondorengo funtzioa: $y = -\frac{10}{x}$ **. Ondoren eta taularik egin gabe (desplazamenduz) irudikatu funtzio hauek grafika berean:** 2 puntu

a) $y = -\frac{10}{x+3}$; b) $y = -\frac{10}{x-5}$; c) $y = -\frac{10}{x-2} + 4$;

3. Lotu grafika bakoitza bere funtzioarekin: 1 puntu

a b c



d e f

$1) y = \frac{8}{x}$; $2) y = -\frac{8}{x} + 3$; $3) y = x - 5$; $4) y = x^2 + 2$; $5) y = x$; $6) y = -x^2 + 2$

$7) y = -\frac{8}{x}$; $8) y = x + 5$; $9) y = x^2 - 2$; $10) y = -x$; $11) y = -x^2 - 2$

4. Irudikatu funtzio hauek taula erabiliz eta asintotak ere bai: $y = \frac{20}{x-4} + 1$ 1,5 puntu

Figura 8-2. Versión original del cuestionario en Euskara.

Como ya se ha comentado previamente, este examen consta de 4 cuestiones, y con todas ellas se intenta abarcar poco más o menos la materia que se ha dado con los alumnos.

En el capítulo 5, ya se adelantan cuales son los conceptos que se han tratado con estos alumnos, realizando el análisis de la unidad didáctica, por lo tanto no es extraño ver que en este examen aparezcan varias cuestiones relacionadas con las representaciones gráficas (es lo que más se ha estudiado en clase).

La primera de las preguntas es un ejercicio en el cual los alumnos deben representar diferentes tipos de funciones con la ayuda de la elaboración de una pequeña tabla. El tipo de funciones que aparecen son funciones lineales, funciones afines y funciones cuadráticas.

Durante el proceso de estudio también se ha trabajado con representaciones gráficas de funciones de proporcionalidad inversa, pero se ha querido diferenciarlas y proponerlas en otras cuestiones debido a la dificultad que los estudiantes tienen para construir sus gráficas.

En este primer ejercicio hay 7 apartados (cada uno con su función), y es muy revelador que solo este ejercicio vale más de la mitad de la nota del examen, 5.5 puntos sobre 10, lo que quiere decir que si los alumnos realizan medianamente bien esta cuestión tendrán muchas posibilidades de aprobar esta materia.

El segundo ejercicio también trata de que los examinados realicen representaciones gráficas. En este caso las representaciones gráficas serán sobre funciones de proporcionalidad inversa. Además, el ejercicio tiene una peculiaridad y es que en la primera de las funciones si que podrán construir una pequeña tabla para la representación de la función, pero las otras tres funciones las deberán representar a partir de diferentes desplazamientos tomando como origen la primera función.

Para resolver este ejercicio los alumnos deben saber construir una función de proporcionalidad inversa mediante la elaboración de una pequeña tabla, pero además tienen que saber que si existe una función igual pero con parámetros adicionales que se suman fuera o dentro del denominador, se producirán desplazamientos verticales u horizontales en sus representaciones. Por ello, este ejercicio se debe resolver en un único grafico, para que los alumnos muestren ese desplazamiento. En cuanto a la puntuación, 2 puntos para valorar este ejercicio. Debido a la mayor dificultad con respecto al anterior, se evalúa con menos puntos.

El tercer ejercicio es diferente a los otros dos. En este caso ya no deben realizar la representación gráfica, lo que deben hacer es relacionar cada gráfica con una de las expresiones. Para ello deben conocer bien las diferentes características de las funciones: Cuando una función lineal es creciente, ¿como aparece en su expresión?, ¿y cuando es decreciente?, etc. Este ejercicio únicamente se ha valorado con 1 punto.

Por último, el cuarto ejercicio trata de representar una función de proporcionalidad inversa, con la ayuda de la elaboración de una pequeña tabla. La función no está centrada en los ejes cartesianos por lo que se podría construir a partir de desplazamientos con origen de otra función. Pero lo que se les quiere pedir a los alumnos en este caso es que realicen los cálculos para elaborar la tabla y posteriormente el gráfico. Un total de 1.5 puntos son los que pueden obtener a partir de este ejercicio.

Estos ejercicios no han sido escogidos al azar y se han puesto en el examen sin razón ninguna. Es cierto que a lo largo del periodo de docencia se han visto más conceptos y más tipos de ejercicios, pero con estos si que se puede englobar de la mejor manera posible los conocimientos a los que se quería llegar.

Por ejemplo, las dos primeras sesiones con este grupo de tercero de diversificación se estudiaron el Sistema de Ejes Cartesianos, y no encontramos ninguna pregunta en la que aparezca específicamente algo relativo a este concepto. Pero si que indirectamente, en las cuestiones en las que hay que elaborar una representación gráfica mediante la ayuda de una tabla, se está cuestionando también si los alumnos manejan correctamente ese sistema de coordenadas.

Como segundo ejemplo se podría destacar la sesión en la que con la ayuda del software GeoGebra se estudió el método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales a partir de funciones lineales. En esta sesión se produjo un caos total entre los alumnos por lo tanto no sería apropiado ponerles un ejercicio de estas características.

Previamente ya se ha comentado cual es el valor de cada una de las cuestiones dentro del examen, pero ¿Qué es lo que se evalúa dentro de cada cuestión?, ¿Qué características son las que más se valoran dentro de cada ejercicio?

- 1er ejercicio: Elaboración de la tabla de cada función, resolución de cada representación gráfica, limpieza en la representación y formalidad en la respuesta.

- 2º ejercicio: Elaboración de la tabla de la función originaria, representación de dicha función, los 3 desplazamientos nuevos para las funciones nuevas, limpieza en la representación y formalidad en la respuesta.

- 3º ejercicio: Número de aciertos únicamente.

- 4º ejercicio: Elaboración de la tabla, resolución de la presentación, representación de las asíntotas, limpieza en la representación y formalidad en la respuesta.

No es que sea fundamental para este trabajo de fin de master saber cuales van a ser los argumentos que va a utilizar el docente a la hora de evaluar, sino que con este resumen hacemos hincapié a las pautas que les hemos marcado a los alumnos durante el periodo de docencia. Obviamente tendrán que realizar bien las representaciones, construir bien las tablas, etc. pero además (y debido a que son alumnos de diversificación) se ha insistido mucho con los aspectos formales, limpieza, etc. Por lo que tendrán un peso relevante en este cuestionario.

8.3. Comportamientos esperados

Para describir los comportamientos esperados de los alumnos en este examen, en primer lugar hay que recordar el capítulo 6, donde se ha descrito cuales eran los errores y dificultades esperables de estos alumnos, además de exponer un apartado (apartado 6.3.) donde se ha definido muy concretamente a este tipo de alumnos.

Además de los errores y dificultades descritos en dicho capítulo, se ha elaborado una pequeña lista con los comportamientos que pueden tener los alumnos en este cuestionario en concreto:

- Representar una función afín como una función lineal. En el primer ejercicio aparece la función y = -6. Se prevé que los alumnos la confundan con la función y = -6x.

- Confundir los signos en las representaciones tabulares.

- Representar las funciones de proporcionalidad inversa como funciones continuas, sin respetar las asíntotas.

- Representar las rectas con algún punto que no está dentro de dicha recta. Puede ocurrir que en la tabla de valores calculen todos los puntos correctamente exceptuando uno. Dicho punto no quedará representado en la recta de la función. Pero los alumnos dibujarán una pequeña curva en dicha recta.

- Asociar representaciones de funciones lineales crecientes con expresiones algebraicas de funciones lineales negativas y viceversa.

- Errores formales en las representaciones gráficas como no marcar las unidades de escala, o utilizar unidades de escala no apropiadas.

- Realizar únicamente de forma correcta las representaciones de funciones para los valores positivos de x.

8.4. Resultados

A continuación se va a realizar un análisis más profundo de las diferentes resoluciones y errores diversos cometidos en la realización del cuestionario por los alumnos de 3º de ESO diversificación.

Una vez que se haya ejecutado este trabajo, se realizará un pequeño resumen donde se podrán observar las diferencias entre los resultados esperados en la resolución del cuestionario a priori, y los resultados que verdaderamente han acontecido.

Para analizar mejor los resultados del cuestionario, iremos repasando uno a uno los 4 diferentes ejercicios que contiene el examen:

Ejercicio 1:

Si se observa este primer ejercicio del examen, se aprecia que contiene diferentes apartados. Diferentes apartados donde se pueden cometer diferentes errores. La tabla 8-1 muestra el resultado global del ejercicio y describe el número de representaciones bien y mal realizadas por los individuos.

	Apartado a	**Apartado b**	**Apartado c**	**Apartado d**	**Apartado e**	**Apartado f**	**Apartado g**
Nº de ejercicios mal resueltos	2/13	3/13	2/13	7/13	6/13	4/13	8/13
% de ejercicios mal resueltos (aprox.)	15%	23%	15%	54%	46%	31%	62%

Tabla 8-1. Número de alumnos que han resuelto mal el ejercicio nº 1.

La tabla muestra cuantos de los alumnos han resuelto de manera incorrecta cada uno de los apartados propuestos en el ejercicio.

Los errores cometidos han sido muy diferentes pero lo interesante es ver cual o cuales de los apartados han presentado mayores dificultades. Para ello, se ha elaborado esta tabla de frecuencias, ya que seguramente existan mayores y menores problemas con las representaciones gráficas de diferentes tipos de funciones: funciones afines, funciones lineales, funciones cuadráticas, crecientes, decrecientes, etc.

De los 7 apartados que tiene el ejercicio, los 3 primeros (a, b y c) son realizados correctamente por la gran mayoría de los alumnos, únicamente un 15-20% de los alumnos no los han resuelto bien. Por el contrario, si se observan los resultados de los apartados d, e, y g se aprecia que la frecuencia relativa ha sido de un 54%, 46% y 62% respectivamente, un porcentaje muy superior a los otros tres apartados que ya se han comentado. El otro apartado restante, el apartado f, lo han realizado incorrectamente 4 estudiantes, con lo que vemos que es una función en la que su representación gráfica puede causar problemas pero no en la misma medida que las funciones de los apartados d, e y g.

Los apartados a, b y c corresponden a funciones lineal, lineal y cuadrática respectivamente. Los apartados d, e y g corresponden a funciones cuadrática, afín y cuadrática. Y por último la función del apartado f corresponde al tipo cuadrática.

Si revisamos el número de veces que ha sido incorrectamente representada cada función o apartado y lo analizamos junto con la tipología a la que pertenece dicha función, se pueden concluir lo siguiente:

Por un lado, que las funciones lineales causan pocos problemas a los alumnos a la hora de construir sus representaciones. Esta afirmación se debe que las dos muestras de funciones lineales del examen (apartado a y b) pertenecen al grupo que tiene pocos errores o que se había realizado correctamente.

Por otro lado, que las funciones afines pueden dar problemas, ya que en este caso la única función afín existente en el primer ejercicio del examen (apartado e, $y = -6$), sí que ha sido resuelta incorrectamente con frecuencia.

Y, ¿Qué es lo que ocurre con las representaciones gráficas de las funciones cuadráticas que aparecen en este ejercicio?, ¿Han tenido problemas para representarlas los alumnos? La conclusión es que ha ocurrido de todo. Con unas han surgido más fallos y con otras menos. Por lo tanto para buscar respuestas a esta incógnita, se realiza una división adicional en la tipología de funciones cuadráticas, donde se van a nombrar por un lado las funciones de carácter $Y = ax^2 + c$ (centrada en el eje de ordenadas) y por otro las funciones de carácter $Y = ax^2 + bx + c$ (no centrada en el eje de ordenadas). Realizando esta división se puede afirmar que las funciones cuadráticas que contienen el primer carácter han sido mejor representadas que las funciones cuadráticas con el segundo carácter.

A continuación se analizan cuáles han sido los errores que se han producido en el ejercicio. En este caso, en vez de repasar uno por uno los apartados del primer ejercicio, se hablará de errores tipo que se han encontrado a lo largo de todo el ejercicio (aunque es cierto que en las representaciones de unos tipos de funciones y otros se producen más fallos de un tipo que de otro).

Error tipo a:

A la hora de calcular la tabla de valores, el alumno falla únicamente cuando calcula los valores negativos de x, o únicamente cuando calcula los valores positivos de x. En la figura 8-3 se da el caso de calcular incorrectamente los valores negativos de x. La figura 8-4 también muestra un error tipo a, en este caso se calculan incorrectamente los valores positivos de x.

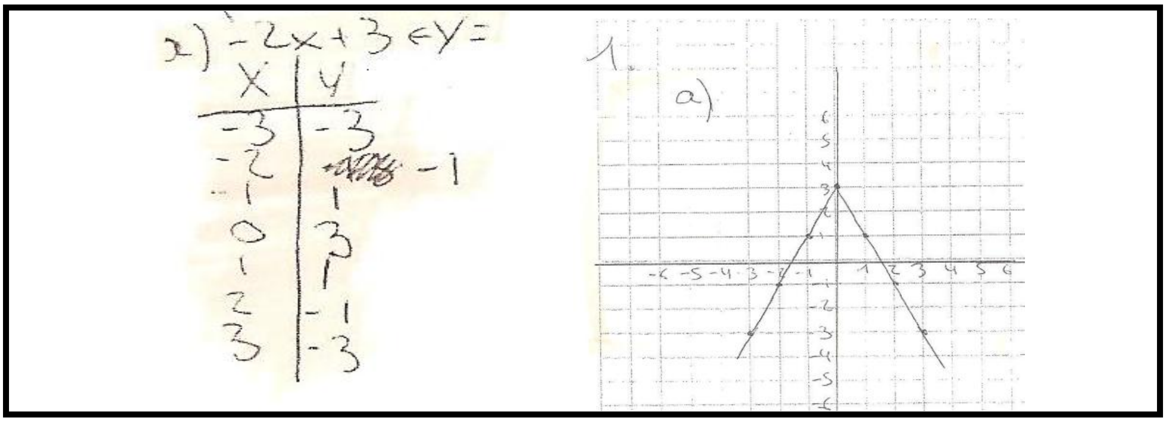


Figura 8-3. Ejemplo del error tipo a.

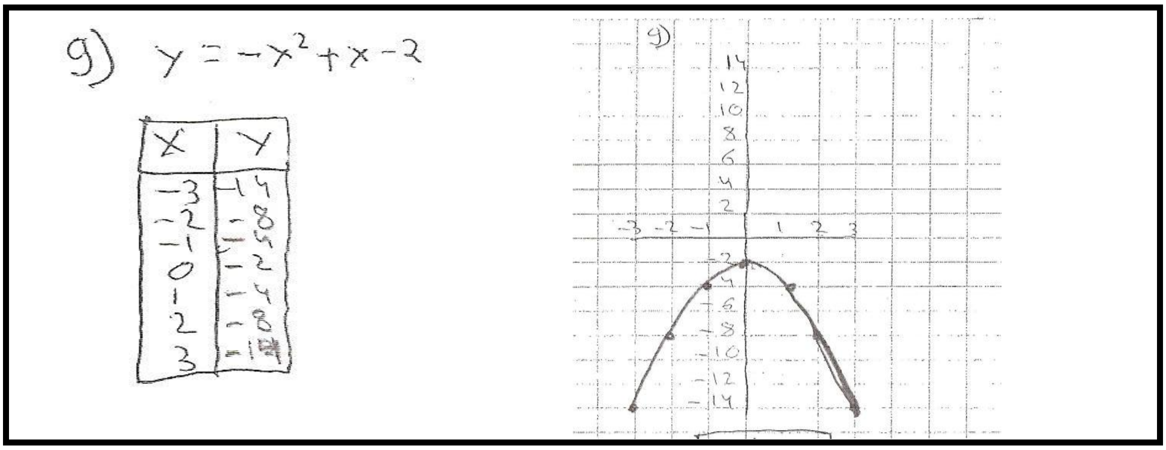


Figura 8-4. Ejemplo del error tipo a.

Error tipo b:

A la hora de calcular la tabla de valores, calcular todos los valores de y erróneamente. Puede ocurrir que el alumno realice este fallo por dos razones diferentes:

- No sustituye correctamente los valores y calcula los valores de Y como si hubiera otra expresión. En la figura 8-5 se observa como uno de los alumnos se ha confundido a la hora de sustituir los valores de x en la expresión analítica, la función con la que se trabaja es y = -6 pero este alumno la ha considerado como y = -6x.

- No existe ningún sentido en los cálculos realizado. En el caso de la figura 8-6 se observa que el alumno ha realizado los cálculos de los valores de y mal, pero esos fallos tampoco tienen una razón concreta.

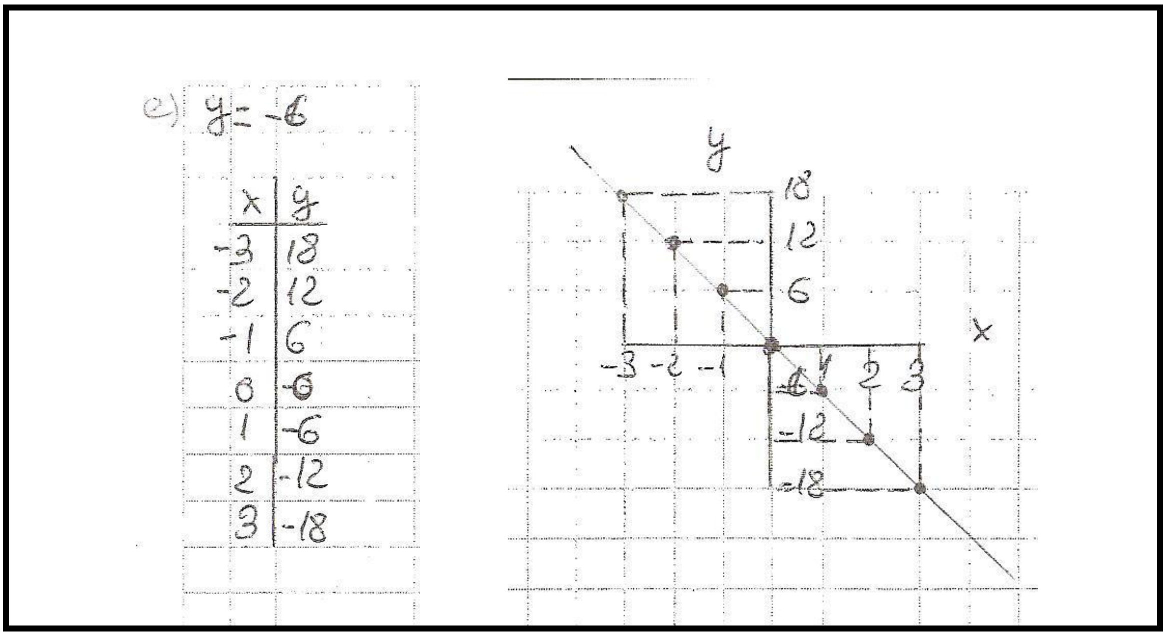


Figura 8-5. Ejemplo del error tipo b.

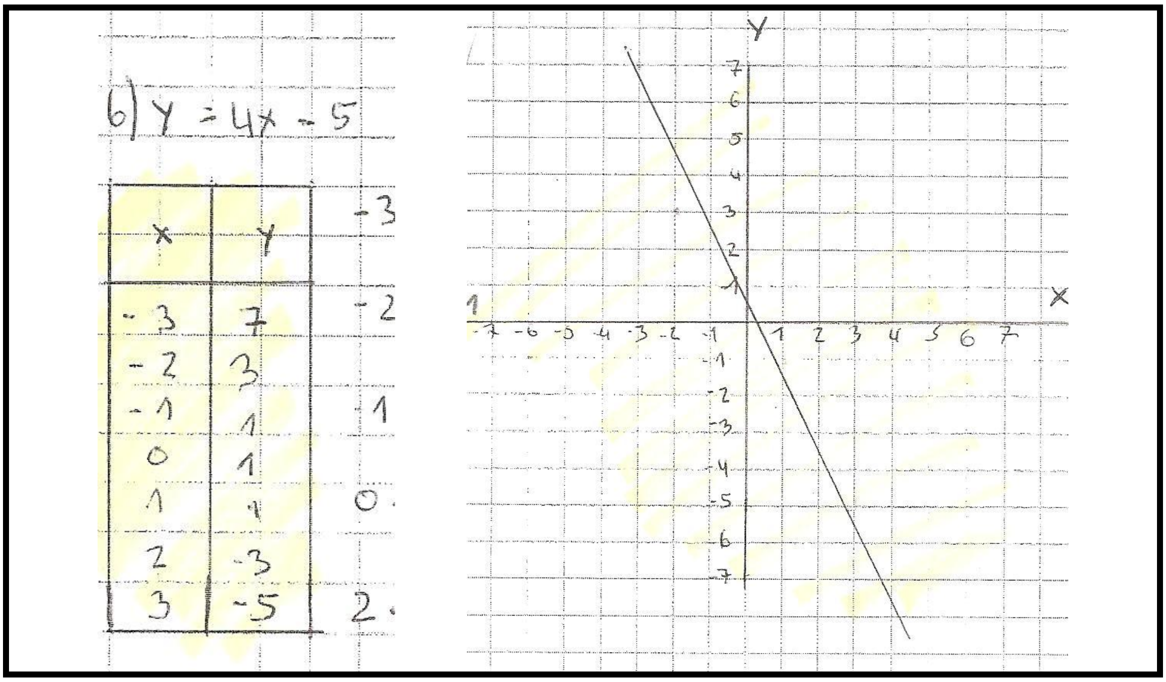


Figura 8-6. Ejemplo del error tipo b.

Error tipo c:

A la hora de calcular la tabla de valores, el alumno falla únicamente en uno de los valores de Y. Esto no ocurre porque no sepa calcularlo si no que se asocia más al típico fallo por despiste, por falta de concentración, etc. A continuación un ejemplo del denominado error tipo c por uno de los alumnos en el cuestionario.

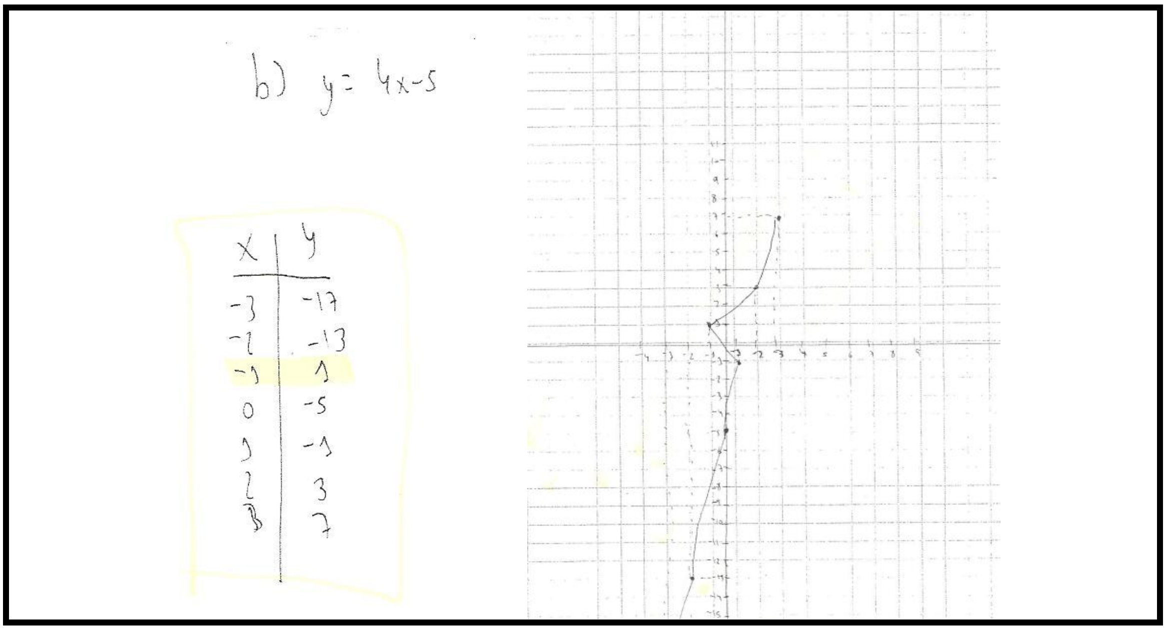


Figura 8-7. Ejemplo del error tipo c.

Error tipo d:

Construir mal el gráfico. Este error no se refiere a construir mal la representación de una función, sino que se refiere a los aspectos formales que debe guardar una gráfica, las escalas, unidades, no confundir el eje de ordenadas con el de abscisas, etc. En la siguiente figura se observa un pequeño fallo en la escala del eje de ordenadas. El alumno que ha construido esta representación, ha realizado todo correctamente exceptuando una pequeña cosa. Después de haber escogido una escala para el eje de ordenadas en la cual proporcionaba dos unidades a cada cuadrícula del folio (acción totalmente correcta), en vez de comenzar poniendo la unidad dos a la unidad uno, con lo cual toda la gráfica va a salir desproporcionada por proporcionar a la primera cuadrícula un valor de una unidad.

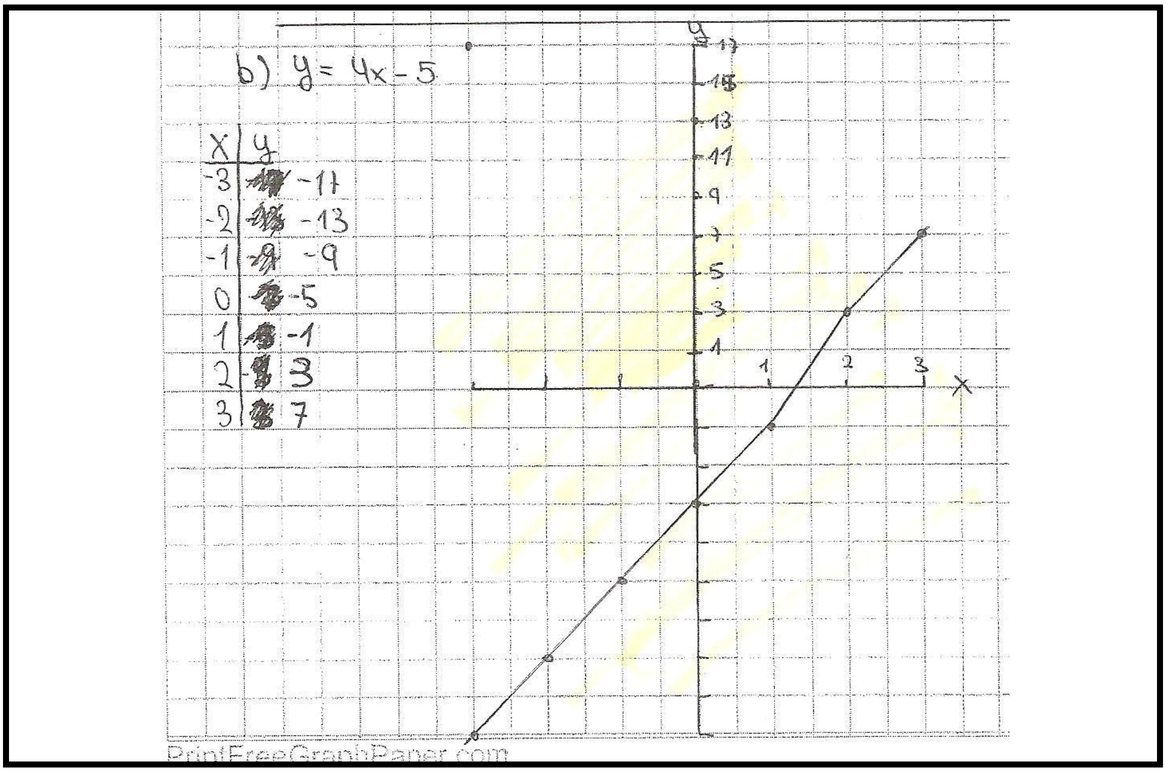


Figura 8-8. Ejemplo del error tipo d.

Error tipo e:

Directamente, el alumno no realiza el ejercicio.

Después de haber definido cuales son los errores más frecuentes en este primer ejercicio, se realiza un análisis para ver con que frecuencia aparece cada tipo de error en cada uno de los apartados, y por su puesto también de forma general o global.

	Apart. a	Apart. b	Apart. c	Apart. d	Apart. e	Apart. f	Apart. g	Total Errores	Total Errores (%)
Error tipo a	1	-	-	3	-	1	3	**8**	**25,00**
Error tipo b	1	1	2	4	5	2	4	**19**	**59,38**
Error tipo c	-	1	-	-	-	-	-	**1**	**3,13**
Error tipo d	-	1	-	-	-	-	-	**1**	**3,13**
Error tipo e	-	-	-	-	1	1	1	**3**	**9,38**
Total Errores	**2**	**3**	**2**	**7**	**6**	**4**	**8**	**32**	**100,00**
Total Errores (%)	**6,25**	**10,67**	**6,25**	**21,88**	**18,75**	**12,50**	**25,00**	**100,00**	

Tabla 8-2. Frecuencia de los diferentes tipos de error en los diferentes apartados del ejercicio 1.

El dato mas notable es que más de la mitad de los errores cometidos están relacionados con el error tipo b, concretamente con un 59,38% sobre el número de errores total. Por lo tanto se puede afirmar que una de las mayores dificultades de los alumnos a la hora de realizar representaciones gráficas parte de que ni si quiera saben construir las tablas de valores. Se observa que este fallo es más frecuente en las funciones cuadráticas y en la función afín.

Entre los apartados a, b y c casi no se observan errores de ningún tipo. Únicamente se aprecia que en el apartado b aparecen errores del tipo b y del tipo c. Estos tipos de errores están más relacionados con despistes de poca importancia. Con lo cual, se reafirma que en la representaciones de funciones lineales existe una mayor facilidad de ejecución.

Ejercicio 2:

El segundo ejercicio también tiene diferentes apartados, y aunque en el enunciado parece que solo existen tres apartados a, b y c, aquí se van a diferenciar 5 apartados diferentes. El primer apartado se pide la elaboración de la tabla de la función de proporcionalidad inversa. El segundo apartado pide construir la gráfica de la función para la cual se ha elaborado la tabla. Y para terminar, los últimos tres apartados serían los considerados por el cuestionario como a, b y c, es decir, los tres diferentes desplazamientos de la función originaria debido a sus cambios en la expresión analítica.

Por lo tanto, de la misma manera que en el primer ejercicio, a continuación se muestra que partes del ejercicio se han realizado correcta e incorrectamente por parte de los individuos.

	Elaboración de la tabla	**Construcción de la primera representación**	**Desplazamiento 1**	**Desplazamiento 2**	**Desplazamiento 3**
Nº de ejercicios mal resueltos	7/13	3/13	6/13	8/13	9/13
% de ejercicios mal resueltos (aprox.)	54%	23%	46%	62%	69%

Tabla 8-3. Número de alumnos que han resuelto mal el ejercicio nº 2.

Se aprecia que en la elaboración de la representación gráfica de la función originaria (y = -10 / x) existen más errores construyendo la tabla que posteriormente construyendo la gráfica, esta afirmación se basa en la cantidad de errores encontrados, 7 y 3 respectivamente.

Y en lo que respecta a los desplazamientos de los otros apartados, decir que es obvio encontrar más errores en el último caso, ya que esta función (y = -10 / (x-2) + 4), con respecto a la función originaria (y = -10 / x), tiene dos desplazamientos, uno horizontal y otro vertical. En el caso de los otros dos apartados únicamente deberán realizar un desplazamiento horizontal.

Además, otra de las razones por la que aparecen más errores en los últimos apartados es que si el primero de ellos se elabora de forma incorrecta, es muy difícil realizar bien los últimos.

Seguidamente se muestran los errores tipo más frecuentes que se han producido en el segundo ejercicio del cuestionario:

Error tipo a:

Para elaborar una tabla de valores que ayude a representar una función de proporcionalidad inversa, es preciso escoger de forma correcta los valores que se van a sustituir por x en la expresión analítica, de tal forma que nos proporcione un número entero para y. El error tipo I consiste en que el alumno no haya escogido todos los valores precisos para sustituir en x.

La figura 8-9 muestra un caso en el que muchos de los valores que se escogen para sustituir en la x son correctos, pero, también toma los valore 3 y -3, con los cuales no se obtiene un número entero para la y.

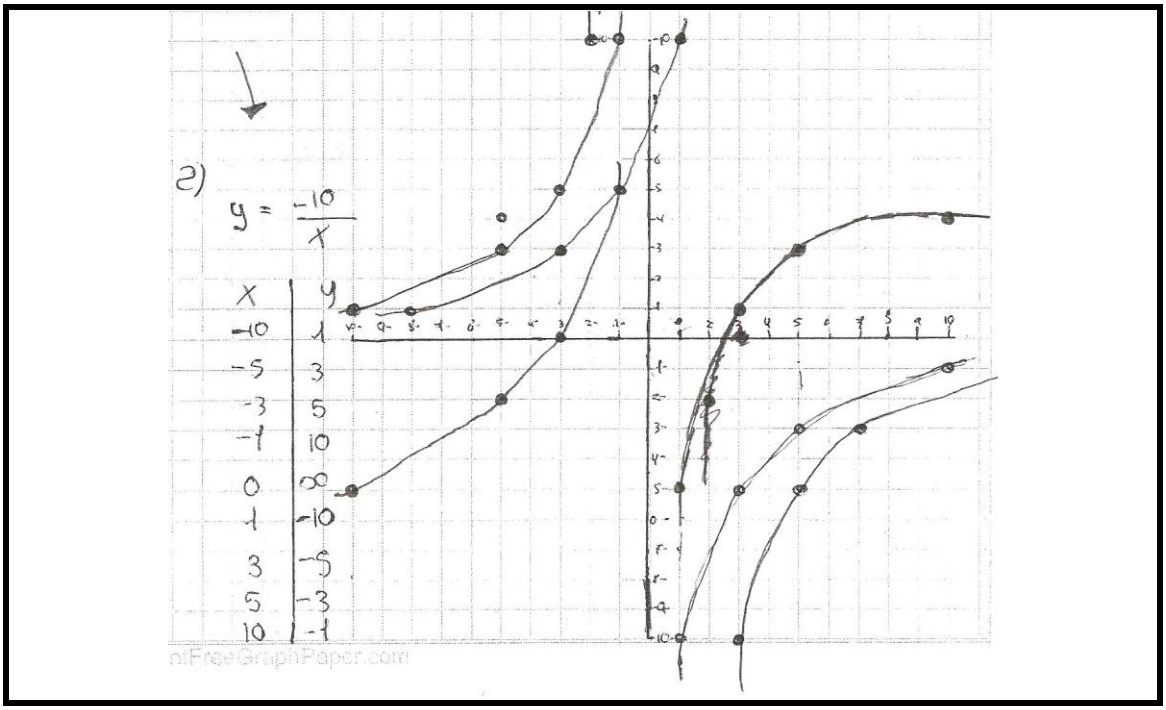


Figura 8-9. Ejemplo del error tipo a.

Error tipo b:

Fallos en la elaboración de la tabla, pero en este caso con el cálculo de los valores de y (después de haber escogido correctamente los valores de y). El alumno que ha realizado el ejercicio de la figura 8-10 comete el error de confundir el signo en el cálculo de los valores que la y tiene que tomar. El único valor bien calculado sería el de infinito.

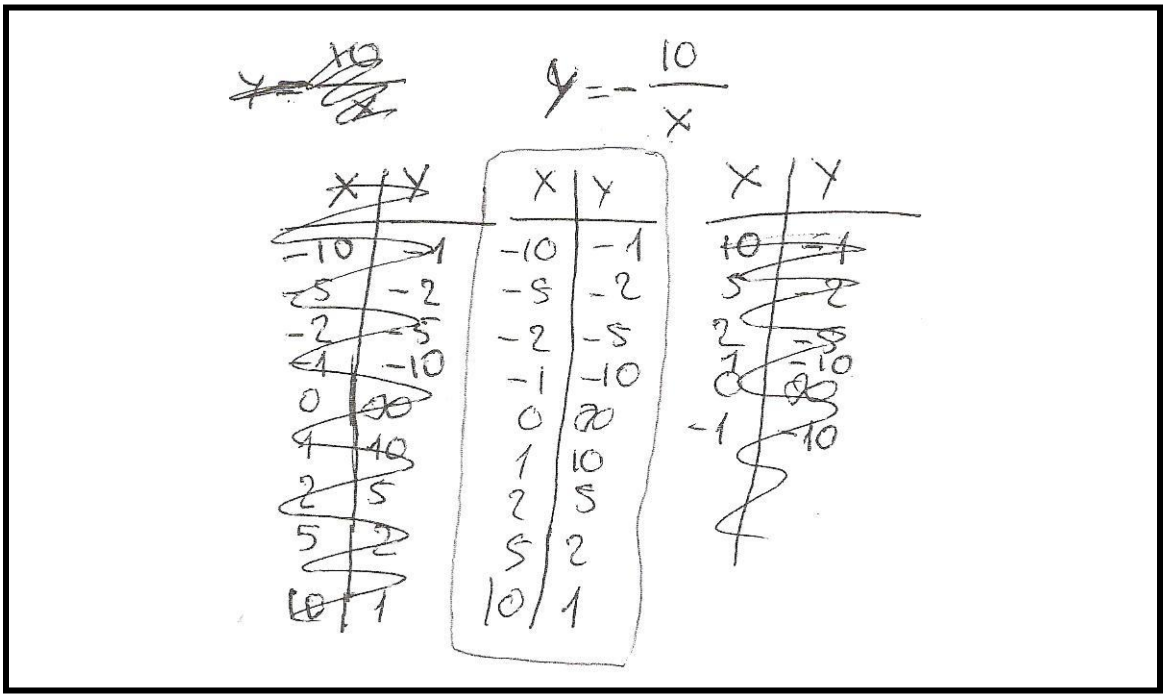


Figura 8-10. Ejemplo del error tipo b.

Error tipo c:

Errores en los desplazamientos de los apartados a, b y c. Estos errores pueden tener diferente carácter: Confundir desplazamiento vertical u horizontal, confundir desplazamiento hacia derecha o izquierda, confundir desplazamiento hacia arriba o hacia abajo, confundirse al querer introducir dos desplazamientos, etc.

En la figura 8-11 se adjunta un caso en el cual se confunden el desplazamiento horizontal y el vertical. Aparece en el gráfico de la imagen, la función originaria y los dos apartados primeros, donde se deben realizar un desplazamiento horizontal en cada uno de ellos. El alumno en este caso realiza los desplazamiento (con las unidades requeridas) pero verticalmente (hacia arriba y hacia abajo).

En cambio, en la figura 8-12 se realizan los desplazamientos de los dos primeros apartados correctamente pero se produce un error con el último. En este caso debe haber un desplazamiento hacia la derecha de dos unidades y hacia arriba de 4 unidades, el alumno sabe que tiene que hacer eso pero no sabe combinarlos.

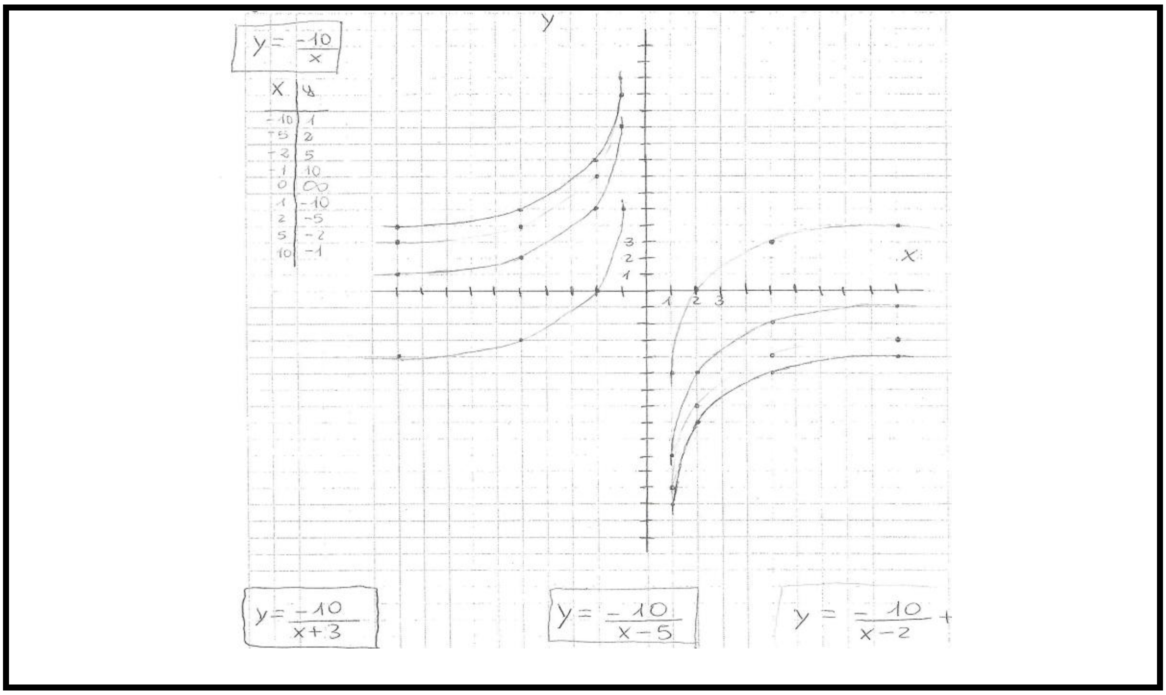


Figura 8-11. Ejemplo del error tipo c.

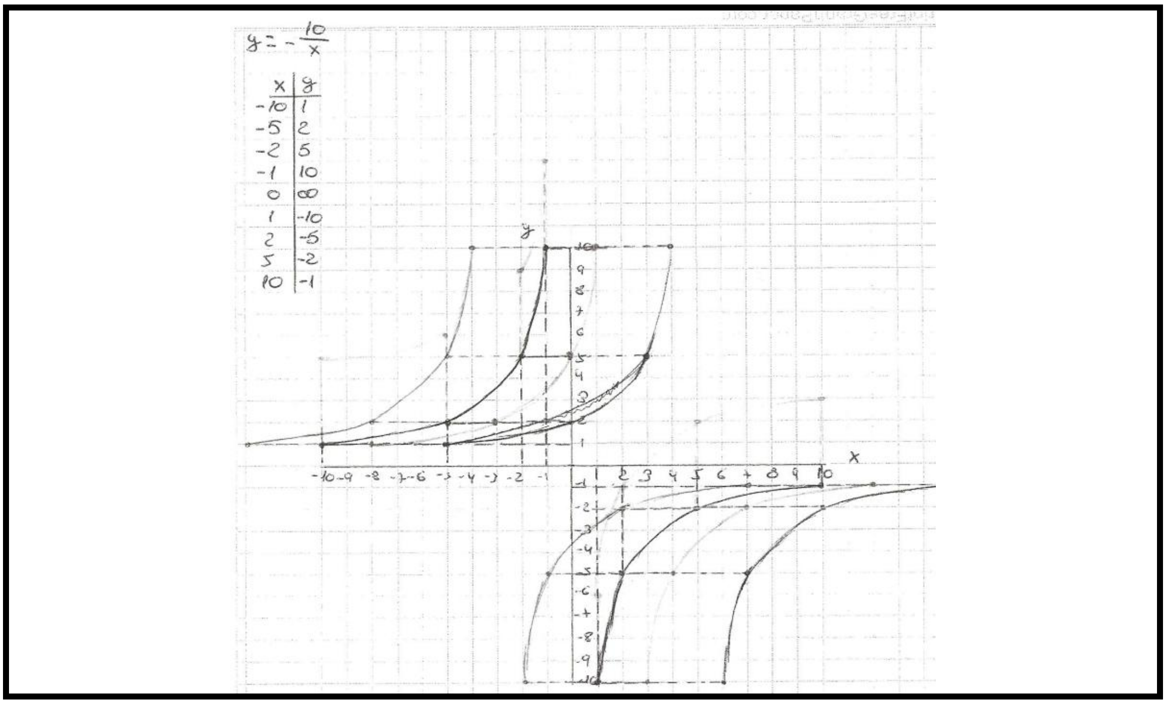


Figura 8-12. Ejemplo del error tipo c.

Error tipo d:

Errores formales en la construcción de las representaciones gráficas. En el ejemplo adjunto se realizan los desplazamientos de las dos primero apartados correctamente pero se produce un error con el último. En este caso debe haber un desplazamiento hacia la derecha de dos unidades y hacia arriba de 4 unidades, el alumno sabe que tiene que hacer eso pero no sabe combinarlos.

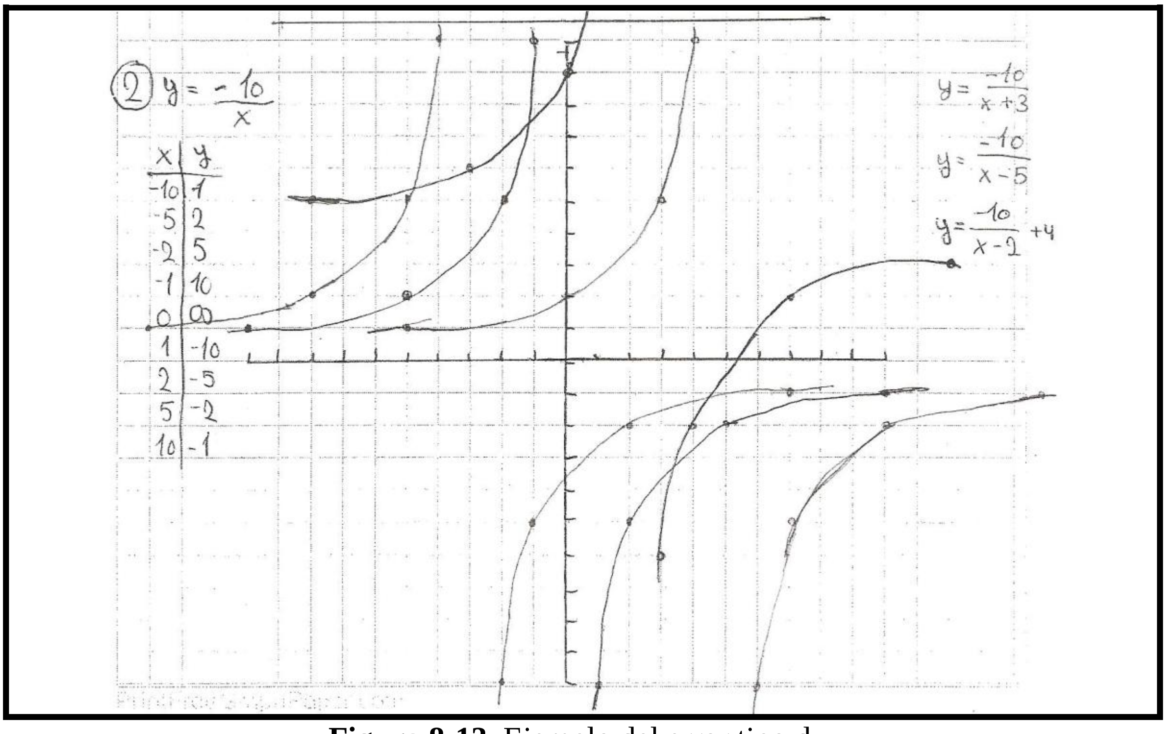


Figura 8-13. Ejemplo del error tipo d.

Error tipo e:

No realizar el ejercicio, o no tener ningún sentido lo realizado.

Ejercicio 3:

El tercer ejercicio del examen es un poco diferente a los dos anteriores. En este caso los alumnos ya no deben realizar representaciones gráficas. Se les proporciona seis gráficas diferentes (cada una con una función), y también se les proporciona 11 expresiones algebraicas, de las cuales deben elegir seis y relacionarlas con sus representaciones gráficas. Cinco de las expresiones algebraicas sobran, y no deben ser relacionadas con ninguna representación.

En este caso, no se va a hablar de diferentes errores tipo, ya que es muy difícil que en este ejercicio se realicen errores de tipología diferente. Se va a investigar únicamente, con qué frecuencia se ha acertado y fallado cada tipo de relación requerida por los alumnos.

Antes de eso, se quiere precisar que de los 3 individuos que han realizado el examen, 3 de ellos no han entendido bien el ejercicio, y en vez de relacionar una expresión para cada gráfica, han puesto dos, de tal manera que las 11 opciones quedasen cubiertas. A continuación se muestra un ejemplo con uno de los ejercicios realizados por uno de estos individuos:

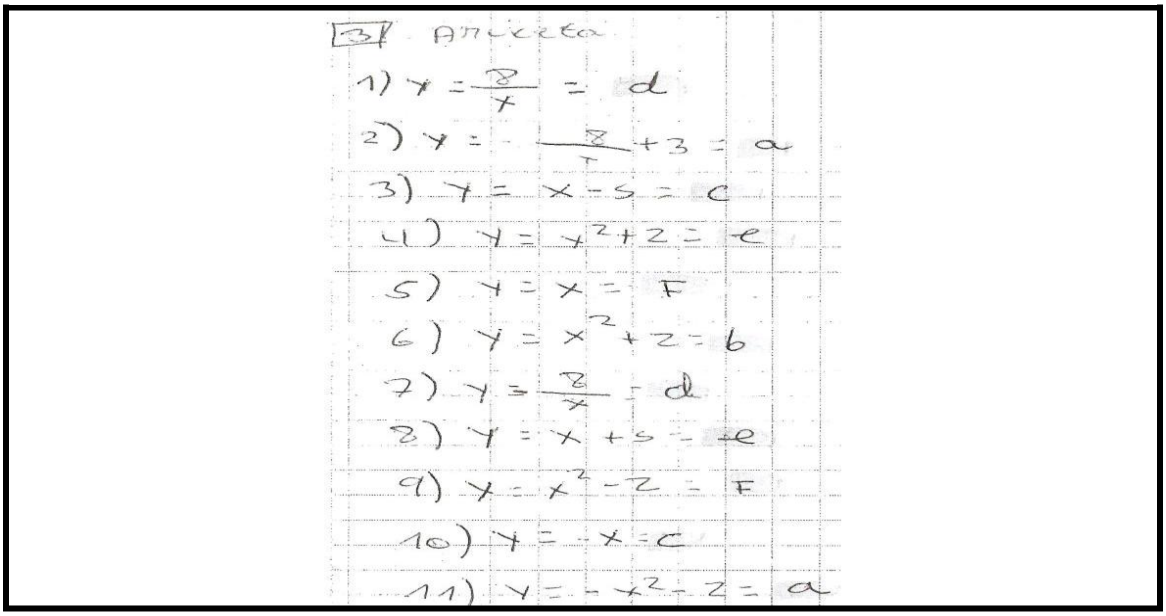


Figura 8-14. Ejercicio 3 mal resuelto por uno de los alumnos.

Por lo tanto ahora se van a mostrar los errores cometidos por los alumnos, pero la tabla adjunta en vez de tener 13 individuos, tiene únicamente 10.

	Gráfica a	**Gráfica b**	**Gráfica c**	**Gráfica d**	**Gráfica e**	**Gráfica f**
Nº de ejercicios mal resueltos	0/10	5/10	6/10	0/10	7/10	0/10
% de ejercicios mal resueltos (aprox.)	0%	50%	60%	0%	70%	0%

Tabla 8-4. Número de alumnos que han resuelto mal el ejercicio nº 3.

Esta tabla nos proporciona un dato muy interesante. Los alumnos, de forma global, han tenido dificultades al relacionar el gráfico con su expresión algebraica en tres apartados o gráficos. Se aprecia que en tres de los gráficos, b, c y e globalmente los alumnos han tenido problemas para resolverlo, ya que se han contabilizado 5, 6 y 7 errores en cada uno respectivamente. Al contrario en los otros tres gráficos a, d y f, todos los alumnos han relacionado correctamente con la expresión requerida.

Se podría realizar una investigación de porque han sido esos gráficos los que han causado dificultades y porque no los otros tres. Pero simplemente, observando las diferentes repuestas existentes para dichos gráficos, se estima que existen más opciones parecidas (con las que se pueden confundir más fácilmente los alumnos) precisamente en los casos donde ha habido errores.

Con un ejemplo se puede entender más fácil.

Si se escoge la gráfica con la que ha habido una mayor cantidad de errores (apartado e, una parábola, cóncava, centrada en el eje de ordenadas, con su vértice en el punto (0,2)) lo primero que habría que concretar es la respuesta correcta a la misma, la respuesta 6 ($y = -x^2 + 2$). A lo que se quiere llegar es que entre las 11 soluciones posibles existen varias opciones que se parecen a la respuesta correcta, y por ello se cree que existe un mayor número de errores en este apartado. Las respuestas que se consideran parecidas serían las respuestas: 4, 6, 9 y 11.

Ejercicio 4:

En el caso de este ejercicio, deben realizar la representación gráfica de una función de proporcionalidad inversa. En el segundo ejercicio también se debían construir representaciones gráficas de este tipo, pero en este caso debe realizar esta representación, de tal manera que en vez de construirla a partir de desplazamientos de los puntos, tienen que utilizar una tabla de valores y directamente representar la función requerida.

Si se observa el cuestionario, se aprecia que no existen diferentes apartados, únicamente existe el ejercicio de realizar la representación junto a las asíntotas propias de la misma. Por ello, el trabajo a realizar se ha dividido en los tres objetivos más importantes de la cuestión,(construcción de la tabla de valores, representación de la función y representación de asíntotas) , y a continuación se va a analizar cuáles de estas partes han sido bien realizadas y cuales han tenido algún tipo de error. De la misma manera que en los demás ejercicios, esto último se puede observar en la siguiente tabla adjunta:

	Elaboración de la tabla	**Representación de la función**	**Representación de asíntotas**
Nº de ejercicios mal resueltos	9/13	9/13	13/13
% de ejercicios mal resueltos (aprox.)	69%	69%	100%

Tabla 8-5. Número de alumnos que han resuelto mal el ejercicio nº 4.

Ninguno de los alumnos ha realizado correctamente todo el ejercicio y solamente dos de ellos han logrado realizar correctamente dos de las tres partes que se han considerado como objetivos del ejercicio (aunque es cierto que esas dos eran las más importantes).

No se considera un desastre por la razón de que los alumnos no sepan hacer nada, sino que se ve que el aprendizaje de la mecánica que tienen que llevar los alumnos a la hora de realizar la tabla de valores, no se ha llevado a cabo de manera correcta.

Evidentemente, una vez que los alumnos no han logrado construir la tabla, difícilmente van a representar correctamente la función y las asíntotas de la misma.

Ahora se muestran los errores más frecuentes en este ejercicio, pero de antemano se sabe que estarán relacionados con la construcción de la tabla:

Error tipo a:

En la construcción de la tabla de valores, no se escogen correctamente los valores de x, parece que se lía con los signos. En la construcción de la tabla de valores del ejemplo de la figura 8-15, se observa que el alumno comete errores a la hora de escoger los valores de x. La intención del alumno es buena, escoge unos avalores con los que después de la resta den valores enteros para y. Lo que ocurre que esos valores serían correctos si hubiese una suma y no una resta.

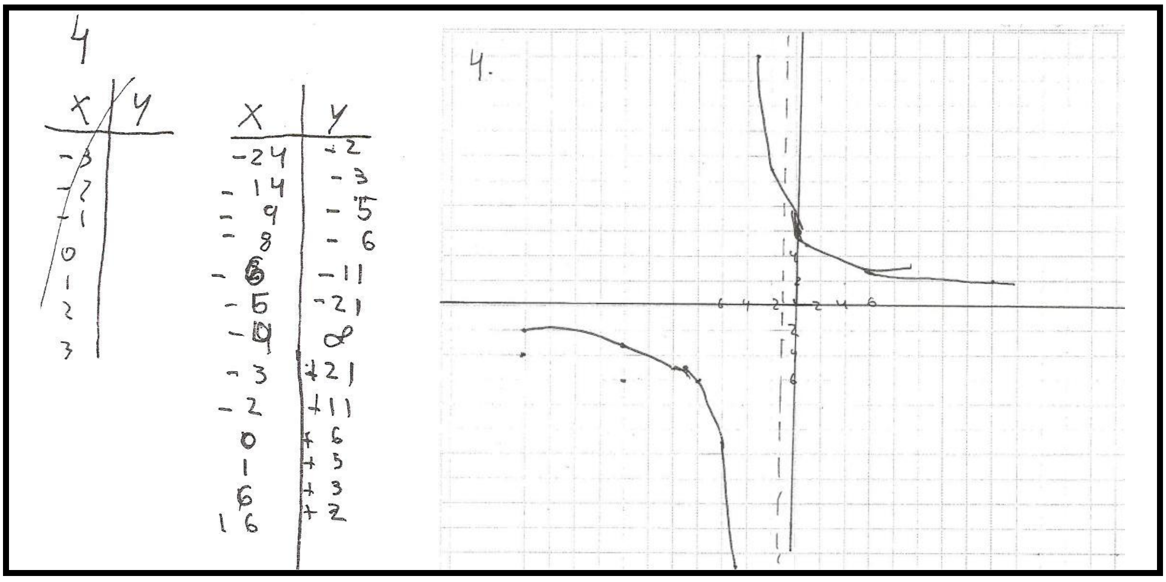


Figura 8-15. Ejemplo del error tipo a.

Error tipo b:

En la construcción de la tabla de valores, no se escogen correctamente los valores de x, se escogen como si la función fuese la siguiente: y = 20 / x.

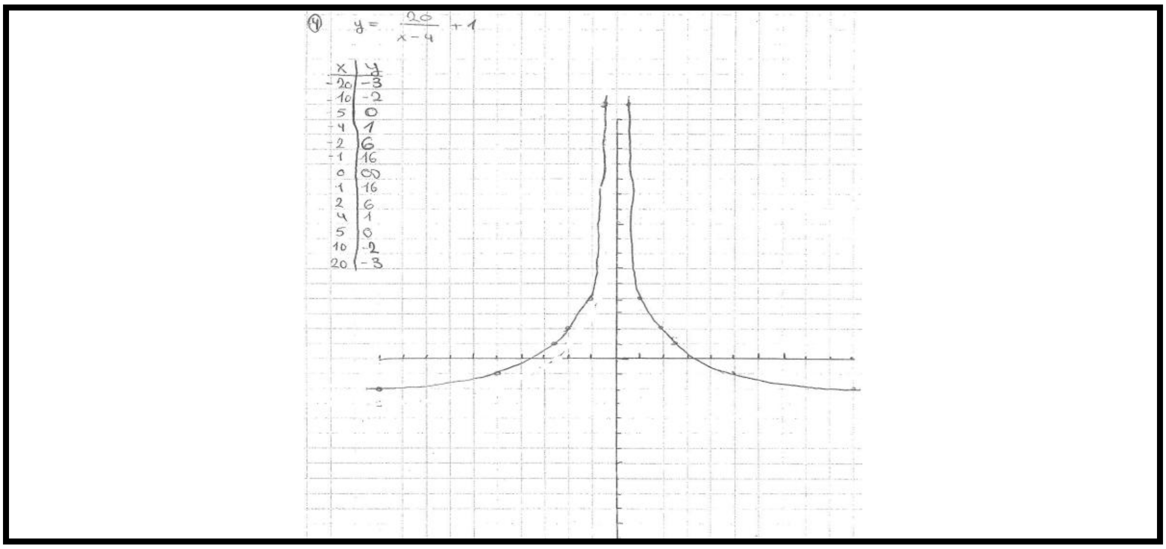


Figura 8-15. Ejemplo del error tipo b.

Error tipo c:

Intenta realizar la tabla de valores de otra forma diferente. El alumno que ha realizado la representación de la figura 8-16 intenta realizarla de una manera diferente, pero incorrecta. Primero escoge los valores de x y calcula los de y como si la función fuese y = 20 / x. Posteriormente, a los valores de y calculados les va restando uno a uno 3 unidades (se supone que esa resta la inventa debido a los parámetros -4 y +1).

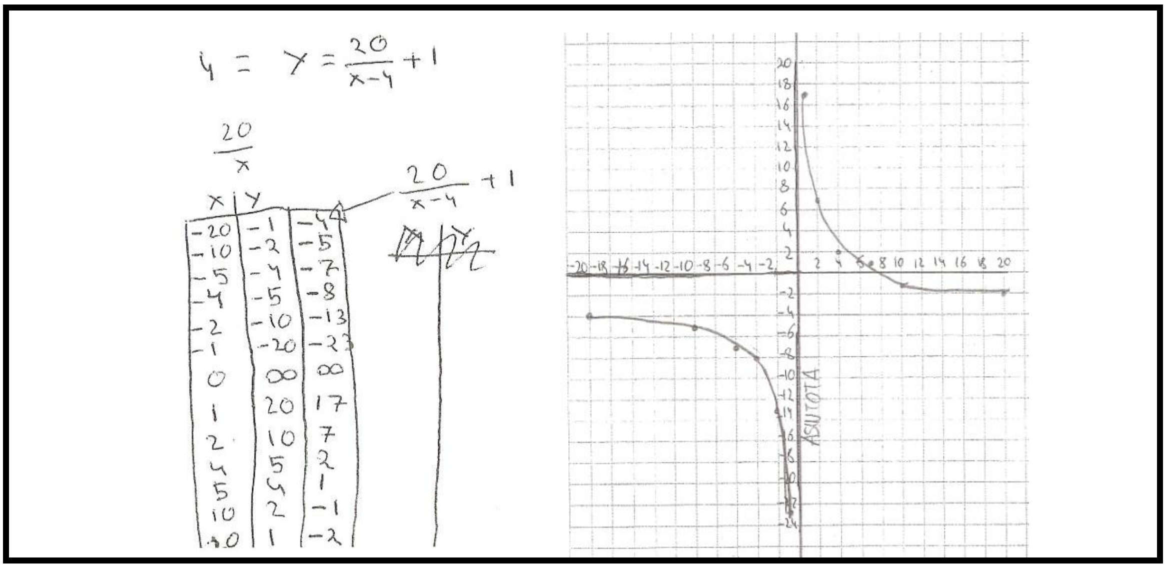


Figura 8-16. Ejemplo del error tipo c.

Error tipo d:

No se realiza el ejercicio.

8.5. Discusión de los resultados

En lo que al primer ejercicio se refiere, se pueden afirmar dos cuestiones. Por un lado, que dependiendo de qué tipo de función se deba representar, se van a cometer más o menos fallos. Concretamente las expresiones que más dificultades han generado han sido las funciones cuadráticas de expresión $y = ax^2 + bx + c$ (para $a \neq 0$ y $b \neq 0$) y las funciones afines, $y = k$. Por otro lado la mayoría de los errores cometidos están relacionados con la construcción de la tabla de valores. Generalmente, en este cuestionario, si los alumnos han realizado bien la tabla de valores, posteriormente también han realizado correctamente las representaciones gráficas (el Sistema de Ejes Cartesianos ha quedado bien interiorizado por parte de los alumnos).

Los ejercicios 2 y 4 son ejercicios de representación de funciones de proporcionalidad inversa. En ambos ejercicio se observa que la mayoría de los errores cometidos tienen el origen en la construcción de la tabla de valores (al igual que en el ejercicio 1). Pero si centramos el análisis en las funciones de proporcionalidad inversa del tipo $y = k / (x \pm a) \pm b$, vemos que se cometen menos errores en el ejercicio 2. La diferencia es que en ejercicio 2 realizan la representación a partir de otra función (realizando desplazamientos), y en ejercicio 4 deben realizar la tabla concreta de la función que quieren representar. Por lo tanto, las construcciones de las tablas de valores han sido muy problemáticas pero mucho mayor en el caso de las representaciones de expresiones $y = k / (x \pm a) \pm b$.

Se puede afirmar que para este tipo de funciones la representación gráfica ha sido mucho más eficaz que la representación tabular.

El ejercicio 3, siendo un poco más diferente a los demás, también ha proporcionado dificultades a los alumnos. Tal y como se había previsto, han sido varios los errores cometidos a la hora de asociar diferentes expresiones analíticas con representaciones gráficas. Ha quedado demostrado que no tienen bien interiorizado las diferentes características de las funciones, ya que si se presentan varias expresiones algebraicas parecidas, la frecuencia del error ha sido muy superior.

Después de haber realizado el análisis de los resultados del cuestionario, se puede afirmar que aunque exista un cambio en la unidad didáctica para los alumnos de diversificación, a modo global, siguen teniendo muchas dificultades para adoptar el conocimiento de los contenidos. Los errores son muy frecuentes, y aunque estos coincidan con los que se han expuesto como errores previsibles, la frecuencia con la que han aparecido ha sido mayor de lo esperada.

Es cierto además que los alumnos han tenido menos problemas con los ejercicios que teóricamente son propios de 1º y 2º de ESO (coordenadas cartesianas, representación de función lineal, etc.). Pero al contrario, han tenido muchas dificultades para solucionar los ejercicios más propios de 3º y 4º de ESO como asociación de representación gráfica con algebraica, representación de función cuadrática, representación de función de proporcionalidad inversa, etc. Por lo tanto, se concluye que el cambio de unidad didáctica en este tipo de alumnos es necesario.

8.6. Experimentación y análisis de la denominación de la función inversa

Durante el periodo de docencia en el centro y posterior de análisis y trabajo con los datos recogidos en el mismo, ha surgido una necesidad de investigación con respecto a un tema en concreto. Tal y como se aprecia en este último cuestionario, el tema tratado con los alumnos ha sido el de funciones (profundizando mucho en sus representaciones gráficas). Se aprecia también que se ha tratado con diferentes tipos de funciones como función afín, función lineal, función cuadrática o función inversa. ¿Función inversa?, ¿así es como se debe llamar? ó, ¿hay que denominarla de otra manera? quizás, ¿función de proporcionalidad inversa? Probablemente dependa en el contexto en el que sea utilizada. Este es el tema que se va a tratar a continuación. Se ha realizado una pequeña investigación a raíz de cómo debe ser denominado este tipo de función. Para ello, primero se realiza un pequeño análisis en los diferentes libros de texto de la educación secundaria, y posteriormente se hace hincapié en las opiniones de los profesores de la educación secundaria.

Antes de comenzar con el análisis, se ha realizado un trabajo previo de cuáles pueden ser los resultados que se van a obtener. Más concretamente se ha intentado elaborar una lista con todas las denominaciones conocidas para este tipo de función. De esta manera el trabajo que se ha realizado tanto en el análisis de los libros de texto como con los profesores consiste en ver cuales de esas opciones son utilizadas. Las diferentes opciones que se podrán encontrar son las siguientes:

a) Hipérbola.
b) Función inversa.
c) Función inversa numérica.
d) Función de proporcionalidad inversa.
e) Caso concreto de función racional.
f) Otra denominación (esta opción se plantea por si se da el caso de aparecer otro tipo de denominación).

Análisis de la denominación de la función inversa en los libros de texto

Brevemente se va a realizar un análisis sobre la denominación que utilizan los libros de texto de Educación Secundaria a la hora de exponer la función de proporcionalidad inversa.

La función de proporcionalidad inversa es un tipo de función con la que se empieza a trabajar a partir del 4º curso de Educación Secundaria (exceptuando casos como el de diversificación). Por lo tanto, para realizar el análisis se va a recurrir a libros de 4º de ESO y de 1º de Bachillerato. Además para que el análisis no se centre únicamente en la forma de denominar a la función de un libro y de esa forma sea un análisis más variado y diverso, se observarán libros de texto tanto en Euskara como en Castellano y también tanto de la modalidad de Ciencias y Tecnología como de la modalidad Humanidades y Ciencias Sociales.

En la siguiente tabla se muestran los tipos de denominaciones utilizadas por los diferentes libros:

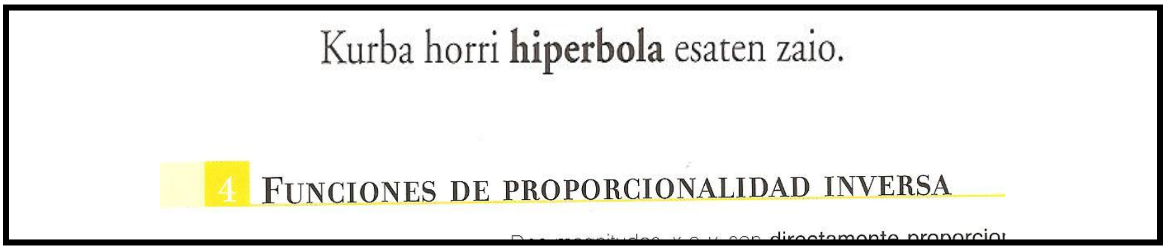
	a	b	c	d	e	f
4º ESO, Modalidad A. Colera (2007 e) Euskara.	X			X		
4º ESO, Modalidad B. Colera (2007 d) Euskara.	X			X		
1º Bachillerato, Mod A. Vizmanos (2008 b) Castel.	X			X		
1º Bachillerato, Mod B. Vizmanos (2008 a) Castel.	X				X	

Tabla 8-6. Denominaciones utilizadas por los libros de texto para la función y = 1/x.

La información obtenida de los libros de texto es muy homogénea. En los dos libros de texto de 4º de la ESO y en el de 1º de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, se denomina a este tipo de funciones de la misma manera. Para la presentación teórica se utiliza el concepto de "Función de proporcionalidad inversa" y cuando se refiere a las representaciones gráficas se utiliza el término "hipérbola".

En cambio, en el libro de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, no se realiza distinción entre las funciones de proporcionalidad inversa y las funciones racionales. El tipo de funciones que estamos analizando las describe como un caso más de las funciones racionales.

En 4º de ESO no se estudian las funciones racionales, pero en 1º de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales sí. Por ello, la gran diferencia es que en los libros de texto de 1º de Bachillerato, dependiendo de la modalidad, la denominación de este tipo de funciones cambia. En la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales se hace una distinción entre las funciones de proporcionalidad inversa y las funciones racionales, y en cambio en Ciencias y Tecnología se toman como un caso particular de las funciones racionales.


Kurba horri **hiperbola** esaten zaio.

4 FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Figura 8-17. Capturas de las denominaciones utilizadas por los libros de texto.

Análisis de la denominación de la función inversa por parte de los profesores

Para llevar a cabo este análisis se precisa de datos con los que poder trabajar, ya que al contrario que con los libros de texto, es más complicado obtener información.

Para ello, se ha elaborado una pequeña encuesta donde se proponen tres pequeñas cuestiones y así poder sacar información respectiva de los docentes. Tal y como se ha afirmado, esta encuesta se realizará por diferentes docentes de matemáticas de la educación secundaria. Concretamente, se ha acudido a diferentes centros de educación secundaria de Pamplona. La encuesta se ha preparado tanto en euskara como en castellano, para poder investigar opiniones de profesores de ambos idiomas. A pesar de haber encuestas en dos idiomas, las encuestas son exactamente iguales lo que permitirá también analizar los datos globalmente.

La encuesta finalmente se ha realizado a 16 docentes, concretamente 13 en euskara y 3 en castellano.

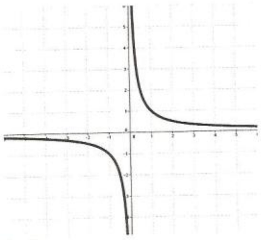
A continuación se muestran las encuestas con las que se han recogido los datos, tanto en euskara como en castellano.

Encuesta en euskara:

1. $y=\frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ______________________

2. Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:



Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ______________________

3. Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?

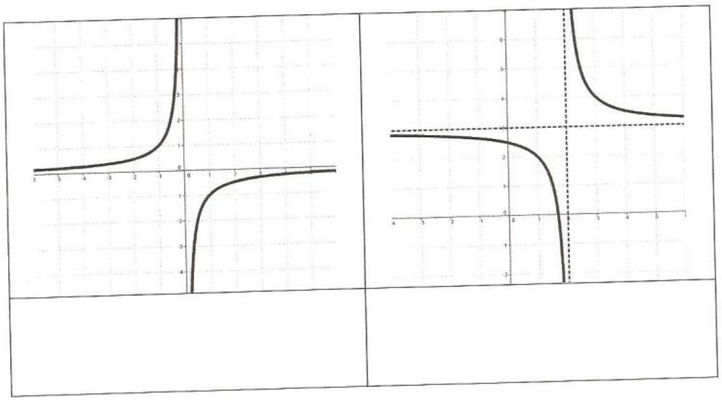


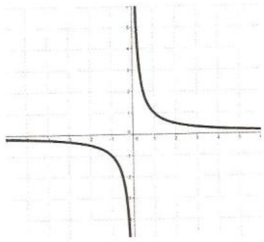
Figura 8-18. Cuestionario a profesores sobre la denominación de la función y = 1/x. Euskara

Encuesta en castellano:

1. En el momento de la introducción de la función $y = \frac{1}{x}$, ¿cómo la denominas?

a) Hipérbola.
b) Función inversa.
c) Función inversa numérica.
d) Función de proporción inversa.
e) Caso particular de función racional.
f) Otra: ________________

2. En el momento de introducción la función anterior aparece representada por:



¿Cambias su denominación?

a) No.
b) Sí, la denomino “hipérbola”.
c) Sí, la denomino “función inversa”.
d) Sí, la denomino “función inversa numérica”.
e) Sí, la denomino “función de proporción inversa”.
f) Sí, digo que es un caso particular de “función racional”.
g) Sí, la denomino: ________________

3. ¿Cómo denominarías a las siguientes funciones?

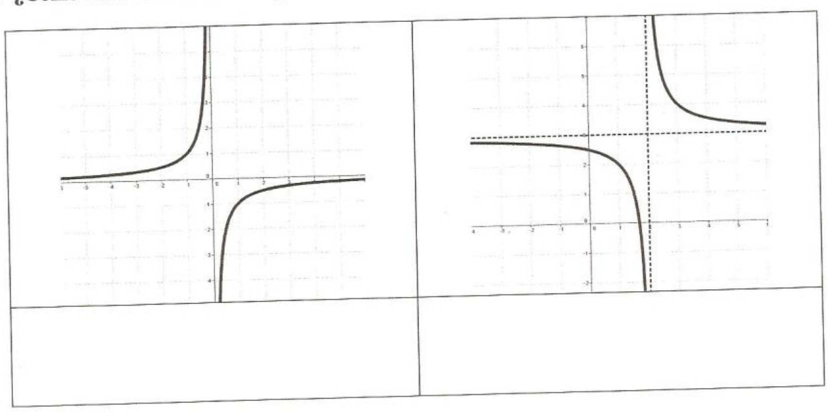


Figura 8-19. Cuestionario a profesores sobre la denominación de la función y = 1/x. Castellano.

Aunque en las imágenes adjuntas aparezcan las tres preguntas en un folio, la encuesta se ha realizado de tal forma que una vez que se había contestado a una pregunta entonces se recogía esa pregunta y se repartía la siguiente. Es decir el docente no podía leer la pregunta siguiente a la que estaba contestando, ya que eso le podía condicionar la respuesta.

A continuación se muestran los resultados de la encuesta:

En primer lugar se ha efectuado un análisis de la frecuencia con la que se ha contestado a las diferentes opciones de las cuestiones. Para ello, a continuación se muestra una tabla en la que se resumen los datos obtenidos y además un gráfico en el que se aprecia más fácilmente la diversidad de las opciones contestadas.

	Respuesta 1		Respuesta 2		Respuesta 3-1		Respuesta 3-2	
	Euskara	**Castellano**	**Euskara**	**Castellano**	**Euskara**	**Castellano**	**Euskara**	**Castellano**
a	2	0	9	2	9	3	10	3
b	3	1	2	1	2	0	1	0
c	0	0	0	0	0	0	0	0
d	6	2	1	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0	0
f	1	0	0	0	1	0	1	0
Subtotal	12	3	12	3	12	3	12	3
TOTAL	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**

Tabla 8-7. Frecuencias absolutas de las opciones contestadas en las diferentes preguntas.

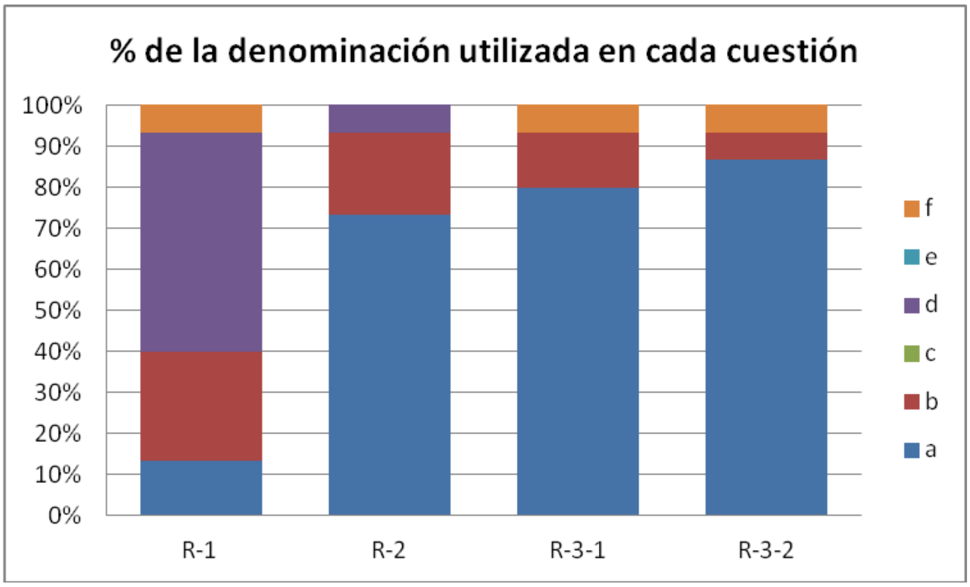


Figura 8-20. Frecuencias relativas de las opciones contestadas en las diferentes preguntas.

De la tabla, aparte de ver la frecuencia con la que se ha contestado a las diferentes opciones en las diferentes cuestiones, se pueden realizar pequeñas observaciones:

- Que el número total de respuestas contabilizadas es de 15 cuando en realidad se ha realizado la encuesta a 16 docentes. Esto se debe a que una de las encuestas se había realizado de manera incorrecta ya que se mostraban varias opciones señalizadas como respuesta en cada una de las cuestiones.

- Que en todas las casillas de las opciones "respuesta c" y "respuesta e" están rellenas por ceros. O lo que es lo mismo, que ninguna de estas dos opciones ha tenido contestación alguna. Estas opciones, "respuesta c" y "respuesta e", pertenecen a las denominaciones "función inversa numérica" y "caso particular de función racional" respectivamente.

- Para que el estudio hubiese sido un poco más completo, con la encuesta realizada en castellano se tendría que haber conseguido una muestra mayor, de esta manera se podría llevar a cabo un análisis comparativo entre los dos idiomas.

Observando el gráfico también se puede habla sobre ciertas conclusiones:

- Si se observan los dos gráficos conjuntamente se aprecia que, exceptuando la primera pregunta la opción más contestada ha sido la "respuesta a: hipérbola". Existe una pequeña diferencia entre la primera pregunta y las otras tres. En la primera se pregunta sobre una *denominación* a partir de una expresión algebraica, y en las otras tres se pregunta sobre una denominación a partir de una expresión gráfica. Por lo tanto, si relacionamos ambas cosas, se puede afirmar que la denominación de hipérbola se relaciona con el contexto gráfico de la función.

- También se quiere mostrar una pequeña incoherencia entre las respuestas recibidas. Si se lee detenidamente el cuestionario se observa que las cuestiones 2 y 3-1 son exactamente las mismas, pero al contrario, sus frecuencias en las respuestas recibidas no son exactamente iguales (parecidas sí). Una de las razones por la que esto ha podido ocurrir es que tal y como se ha explicado antes, las preguntas se han realizado una detrás de otra y no todas al mismo tiempo. De este modo los encuestados no podían ver las preguntas anteriores.

- La tercera de las cuestiones tiene dos apartados, 3-1 y 3-2. En cada uno de ellos se propone una representación gráfica, entre ellas muy parecidas pero con alguna diferencia. En la primera aparece la función $y = 1/x$, y en la segunda $y = 1/(x-2)+3$. ¿Estas pequeñas diferencias provocan diferencias en la denominación de la función? La respuesta es que no. Se observa en el gráfico que los % de las diferentes opciones es casi igual en ambas cuestiones.

- Como última conclusión hay que hacer referencia a las opciones "respuesta b" y "respuesta d". Su presencia es mayor en las respuestas de la primera pregunta y la opción d "respuesta d" o "función de proporcionalidad inversa" tiene una mayor frecuencia.

Conclusión del análisis de la denominación de la función inversa

Como conclusión hay que decir que los profesores de la educación secundaria, a la hora de presentar este tipo de funciones, realizan una distinción entre la expresión algebraica y la expresión gráfica. Para la expresión gráfica utilizan la denominación de "hipérbola". Para la expresión algebraica, las denominaciones más utilizadas son "función inversa" y "función de proporcionalidad inversa".

En el caso de los libros de texto, se observa la misma distinción entre la expresión algebraica y la expresión gráfica. Lo que ocurre es que para la expresión algebraica no se utiliza la denominación "función inversa".

Al principio de este apartado se decía que existía una necesidad de investigación. ¿Cómo se debe denominar a este tipo de funciones? Pues si toma como referencia los libros de texto y profesores de la educación secundaria, habría que decir que la denominación de este tipo de funciones debe ser “hipérbola” en caso de presentarla gráficamente y “función de proporcionalidad inversa” si se expone analíticamente.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Síntesis

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Máster es el de experimentar las restricciones cognitivas que los alumnos de 3º de la ESO de diversificación tienen a la hora de estudiar el tema de funciones.

El trabajo se estructura de forma que en la primera parte se hace un análisis de las funciones en el currículo vigente y en los libros de texto para comprobar que éstos se adecuan a la ley.

En la segunda parte, se analiza el proceso de estudio de las funciones en 3º de la ESO de diversificación. Para ello, se estudia el tema en los libros de texto utilizados como referencia, examinando profundamente el cambio de unidad didáctica realizado para esta clase de diversificación y se analizan las dificultades y errores previsibles además de exponer el proceso de estudio llevado a cabo durante el Prácticum II.

Se presentan los exámenes escritos realizados por los alumnos y los resultados obtenidos. Finalmente, se analizan las resoluciones de los estudiantes en los diferentes ejercicios del examen y se concluyen las posibles restricciones que los alumnos siguen teniendo frente a este cambio en la unidad didáctica.

Conclusiones

Una vez realizado el análisis de los resultados obtenidos en los exámenes, se puede afirmar que los estudiantes de 3º de la ESO de diversificación siguen teniendo dificultades para superar los contenidos a pesar de realizar un cambio en los contenidos de la unidad didáctica. Los errores cometidos coinciden con los descritos como errores esperables, pero la frecuencia con la que han aparecido en los resultados es alta.

Se ha observado tanto en el análisis como en diferentes actividades realizadas durante el periodo de docencia, que los alumnos han tenido mayores dificultades para entender los conceptos propios de 3º y 4º de la ESO. A modo general, han sido capaces de asimilar los conceptos de coordenadas cartesianas, representación de función lineal (propios de 1º y 2º de la ESO), pero si se introducían aspectos como pendiente, ordenada en el origen, representación de función lineal sin ayuda de una tabla de valores, etc. (más propios de 3º de ESO), las dificultades han sido muy elevadas. Por tanto, se concluye que el cambio de unidad didáctica en este tipo de alumnos es necesario.

Finalmente, y a raíz de la pequeña investigación realizada para la denominación de la función $y = 1/x$, se concluye, que aun habiendo varias expresiones con las cuales se puede denominar dicha función, su denominación en los libros de texto de Educación Secundaria y la utilización de la misma por parte de los profesores es muy estable.

Cuestiones abiertas

Después de haber realizado el análisis de las restricciones cognitivas que los alumnos tienen en el proceso de estudio de la función y después de haber expuesto las conclusiones que han surgido a partir de dicho análisis, son dos las cuestiones que se pueden plantear como cuestiones abiertas:

Por un lado, en el apartado 6.3. se ha realizado una descripción de los alumnos de diversificación. En dicho apartado se han descrito más concretamente las características de dos alumnos. Uno de los dos alumnos, el alumno A, era un chico revolucionado, con carácter muy fuerte, etc. Y además éste no ha sido el único en presentar estas características en la clase.

El programa de diversificación curricular deja muy bien marcado que en este tipo de grupos solo debe haber alumnos que presenten una actitud positiva ante el estudio, se confirmen sus evidentes dificultades de índole pedagógica para obtener el título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria. Entonces, ¿Por qué se encuentran alumnos similares al alumno tipo A en el programa de diversificación?, ¿Cómo se evalúa si un alumno presenta actitud positiva ante el estudio?, ¿Es el propio programa de diversificación el que les provoca tener este tipo de actitudes? , Ante un alumno así en 3º de la ESO de diversificación, ¿Hay que cambiarlo a un curso de 3º de la ESO ordinario?

Por otro lado, en el último párrafo del apartado de las conclusiones, se ha explicado que la utilización de la denominación de la función $y = 1/x$ en los libros de texto de Educación Secundaria y la utilización de la misma por parte de los profesores es muy estable. A partir de esta conclusión nace la cuestión abierta entre las dos siguientes hipótesis:

- Hipótesis 1: La estabilidad en el uso de la denominación es buena para los alumnos. Si el uso de este tipo de función en diferentes contextos se utiliza con la misma denominación, provoca que los alumnos puedan recordar y diferenciar mejor este tipo de función. Si en todos los libros de texto y todos los profesores utilizan la denominación "función de proporcionalidad inversa", a lo largo de los años los alumnos aprenderán fácilmente a identificar este tipo de función, porque solo la asocian a una denominación.

- Hipótesis 2: La estabilidad en el uso de la denominación no es buena para los alumnos. Si el uso de este tipo de función en diferentes contextos se utiliza con la misma denominación, provoca que los alumnos no puedan identificar las características de los diferentes contextos. Si en unos cursos se utiliza una denominación, en otros cursos otra, si para la expresión gráfica se utiliza otra, etc. se podrán diferenciar las características de estos contextos, por lo tanto la estabilidad será mala.

Referencias

Referencias:

1. *Currículo vigente: Educación Primaria, ESO y Bachillerato.*

Etapa	Referencia
Primaria	Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. BOE 173, de 20 julio, 31487-31566.
ESO	Ministerio de Educación y Ciencia (2007). REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE 5, de 5 enero, 677-773.
Bachillerato	Ministerio de Educación, Política Social y Deporte (2008). ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato. BOE 147, de 18 junio, 27492-27608

2. *Libros de texto.*

Curso	Referencia
1º ESO	Colera, J., Gaztelu, I. (2007 a). *Matemáticas 1*. Madrid: Grupo Anaya.
	Álvarez, M., Miranda, A., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M., Santos, T. (2007). *Matematika 1 DBH*. Bizkaia: Zubia Santillana.
	Berenguer, L., Berenguer, M., Cobo, B., Daza, M., Fernández, F., Pasadas, M., Payá, A., Pérez, R. (2002). *Matemáticas 1º E.S.O.* Granada: Proyecto Sur.
2º ESO	Colera, J., Gaztelu, I. (2007 b). *Matemáticas 2*. Madrid: Grupo Anaya.
3º ESO	Colera, J., Gaztelu, I. (2007 c). *Matemáticas 3*. Madrid: Grupo Anaya.
4º ESO, Ciencias y Tecnología	Colera, J., Gaztelu, I. (2007 d). *Matemáticas 4, Modalidad B*. Madrid: Grupo Anaya.
4º ESO, Ciencias Sociales	Colera, J., Gaztelu, I. (2007 e). *Matemáticas 4, Modalidad A*. Madrid: Grupo Anaya.
1º Bachillerato, Ciencias y Tecnología	Vizmanos, J., Hernández, J., Alcaide, F. (2008 a). *Matematicas 1, Ciencias y Tecnología*. Madrid: Grupo SM.
1º Bachillerato, Ciencias Sociales	Vizmanos, J., Hernández, J., Alcaide, F. (2008 b). *Matematicas 1, Humanidades y Ciencias Sociales*. Madrid: Grupo SM.

3. *Texto del uso de GeoGebra en los momentos de exploración, ilustración y demostración*

Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. \emph{Revista do Instituto GeoGebra Internacional de Sao Paulo}, vol. 2(1), 52--64.

4. *Texto programa diversificación curricular*

ORDEN FORAL 169/2007, DE 23 DE OCTUBRE, DEL CONSEJERO DE EDUCACIÓN POR LA QUE SE REGULAN LOS PROGRAMAS DE DIVERSIFICACIÓN CURRICULAR DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA EN LA COMUNIDAD FORAL DE NAVARRA

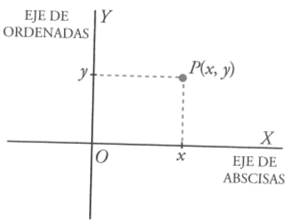
Gobierno de Navarra. Ministerio de Educación y Cultura(Texto publicado en BON N.º 145 de 21 de noviembre de 2007).
http://www.lexnavarra.navarra.es/detalle.asp?r=29534

Anexos

A. Unidad didáctica de los libros de texto

- **Libro de texto de 1º ESO**

1 Coordenadas cartesianas



En un sistema de ejes cartesianos:

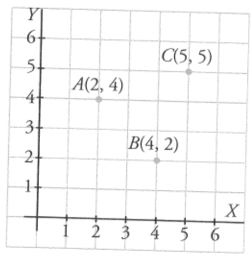
- El eje horizontal se llama eje X o **eje de abscisas.**
- El eje vertical se llama eje Y o **eje de ordenadas.**
- El punto O, donde se cortan los dos ejes, es el **origen de coordenadas.**

Cada punto del plano se designa por sus dos coordenadas:

- La primera coordenada se llama "x del punto" o **abscisa.**
- La segunda coordenada se llama "y del punto" u **ordenada.**

Ejercicio resuelto

Determinar la abscisa y la ordenada de los siguientes puntos:

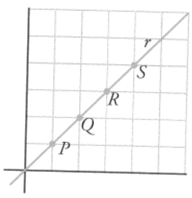


- ***A*(2, 4)**
  — La "x del punto es 2"; es decir, 2 es la abscisa del punto.
  — La "y del punto es 4"; es decir, 4 es la ordenada del punto.
- ***B*(4, 2)**
  — La abscisa es 4.
  — La ordenada es 2.
- ***C*(5, 5)**
  — Tanto la abscisa de C como su ordenada son 5. Es decir, $x = 5$ e $y = 5$.

Actividades

1 Represента el punto $P(3, 5)$ y otro punto Q cuyas abscisa y ordenada sean las mismas de P pero cambiadas de orden.

2 a) Representa los puntos $P(1, 1)$, $Q(2, 2)$, $R(3, 3)$, $S(4, 4)$ y traza en azul la recta, r, que pasa por ellos.



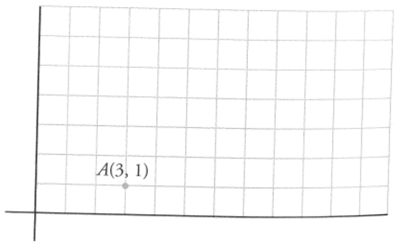
b) Representa los puntos $A(1, 5)$, $B(1, 2)$, $C(3, 4)$ y $D(4, 6)$.

c) Representa los simétricos de A, B, C y D, respecto de r; llámalos A', B', C' y D', y halla sus coordenadas.

d) Compara las coordenadas de cada punto con las de su simétrico respecto de r.

3 Representa estos puntos. Une cada uno de ellos con el siguiente y el último con el primero:

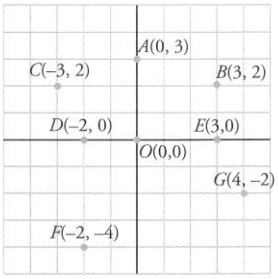
$A(3, 1)$, $B(9, 1)$, $C(9, 5)$, $D(11, 5)$, $E(8, 7)$, $F(4, 7)$, $G(1, 5)$, $H(3, 5)$.



Dibújale a la casa una puerta rectangular y escribe las coordenadas de sus vértices.

258

Coordenadas negativas y fraccionarias



2. Coordenadas cartesianas.

Al **origen de coordenadas** se le suele designar con la letra O. Sus coordenadas son $(0, 0)$. Es decir, $O(0, 0)$.

Los **puntos que están en el eje *Y*** tienen su abscisa igual a 0: $A(0, 3)$.

Los que están a la derecha del eje Y tienen su abscisa positiva, $B(3, 2)$, y los que están a la izquierda tienen su abscisa negativa, $C(-3, 2)$.

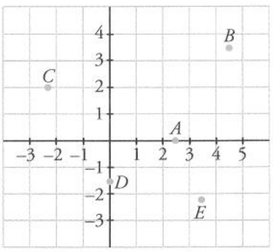
La ordenada de los **puntos que están en el eje *X*** es 0: $D(-2, 0)$, $E(3, 0)$.

Los que están por encima del eje X tienen su ordenada positiva, $B(3, 2)$, $C(-3, 2)$, y los que están bajo el eje X tienen su ordenada negativa: $F(-2, -4)$, $G(4, -2)$.

De igual forma que sobre la recta numérica, se pueden representar sobre los ejes cartesianos puntos con coordenadas fraccionarias.

Ejercicio resuelto

Dar las coordenadas de los siguientes puntos:



$A(2{,}5;\ 0)$ $B(4{,}5;\ 3{,}5)$ $C(-2{,}2;\ 2)$

$D(0;\ -1{,}5)$ $E(3{,}5;\ -2{,}2)$, aproximadamente

Para no confundirnos con la coma decimal, cuando una o las dos coordenadas son números decimales las separamos mediante un ";".

A veces, las coordenadas decimales de un punto se representan mediante fracciones. Por ejemplo:

$$A(2{,}5;\ 0) \rightarrow A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$B(4{,}5;\ 3{,}5) \rightarrow B\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Actividades

4 a) Representa los puntos $A(3, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(5, 2)$.

b) Halla los simétricos, A', B', C', de A, B y C, respecto al eje X y compara sus coordenadas.

Completa la siguiente frase:

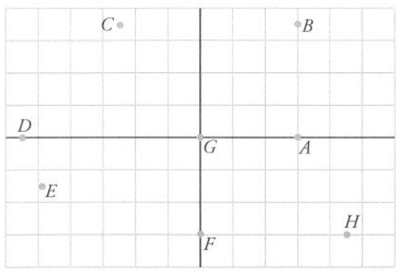
"Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del eje X son … y sus ordenadas son …"

c) Halla los simétricos, A'', B'', C'', de A, B y C, respecto al eje Y y compara sus coordenadas.

Completa la siguiente frase:

"Las abscisas de dos puntos simétricos respecto del eje Y son … y sus ordenadas son …"

5 Da las coordenadas de los siguientes puntos:



Ejercicios y problemas

Representación de puntos

1 Representa los siguientes puntos:

a) $A(3, 2)$, $B(5, 1)$, $C(0, 2)$, $D(5, 5)$, $E(3, 0)$.

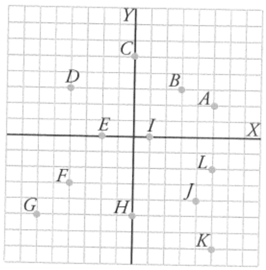
b) $A(-3, 5)$, $B(0, -6)$, $C(-1, -3)$, $D(3, 4)$, $E(5, -2)$.

c) $A(3;\ 0{,}5)$, $B(2;\ -2{,}5)$, $C(-4{,}5;\ 2)$, $D(0;\ 3{,}5)$, $E(-3{,}5;\ -4{,}5)$.

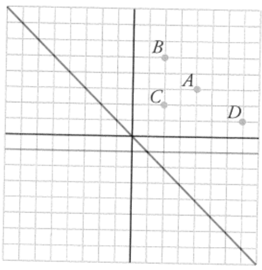
2 Dibuja la figura que se obtiene al unir cada punto con el siguiente:

$A(2, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, 3)$, $D(3, 5)$, $E(6, 5)$, $F(6, 3)$, $G(7, 3)$, $H(7, 1)$, $I(5, 1)$, $J(5, 2)$, $K(4{,}5; 3)$, $L(4, 2)$, $M(4, 1)$, $A(2, 1)$

3 Escribe las coordenadas de los siguientes puntos:



4 Observa la siguiente gráfica y contesta:



a) Escribe las coordenadas de A, B, C y D.

b) Representa los simétricos de A, B, C y D respecto de la recta azul y pon sus coordenadas.

c) Representa los simétricos de A, B, C y D respecto del eje Y y pon sus coordenadas.

d) Representa los simétricos de A, B, C y D respecto de la recta roja y pon sus coordenadas.

5 Lee el mensaje. Para ello, representa los puntos y únelos.

a) (2, 2), (5, 2), (5, 5), (3, 5), (3, 6), (5, 6), (5, 7), (2, 7), (2, 4), (4, 4), (4, 3), (2, 3) y (2, 2).

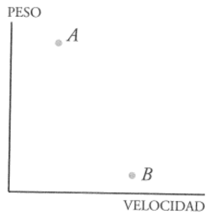
b) (6, 2), (9, 2), (9, 7), (6, 7) y (6, 2).

(7, 3), (8, 3), (8, 6), (7, 6) y (7, 3).

c) (10, 2), (13, 2), (13, 5), (11, 5), (11, 6), (13, 6), (13, 7), (10, 7), (10, 4), (12, 4), (12, 3), (10, 3) y (10, 2).

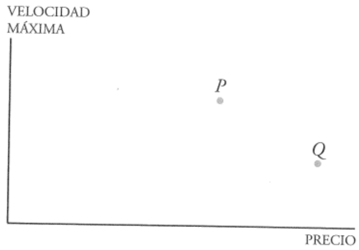
Interpretación de puntos

6 En la siguiente gráfica vienen representados un galgo y un elefante:



¿Qué punto corresponde a cada uno?

7 Los puntos P y Q representan dos coches; uno de Antonio y otro de Bárbara. Di cuál es de cada uno sabiendo que el coche de Antonio es más caro que el de Bárbara, pero el de esta corre más.

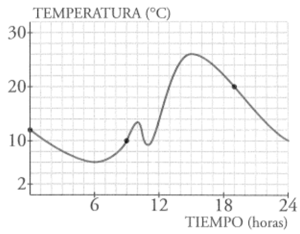


Sitúa sobre el diagrama un punto, C, que represente el coche de Carlos, más barato y menos veloz que el de Antonio y Bárbara. Y otro punto, D, para el de Damián, el más veloz de todos y casi tan caro como el de Antonio.

270

- **Libro de texto de 2º ESO**

1 Concepto de función



Esta gráfica describe la temperatura ambiente, en un cierto lugar, en cada instante de un día.

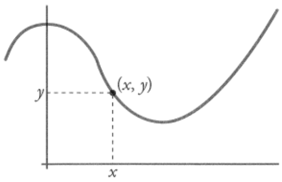
Cada punto de la gráfica relaciona un valor del eje horizontal (tiempo: hora del día) con otro del eje vertical (temperatura en °C):

— A las 0 h (12 de la noche), la temperatura fue de 12 °C.

— A las 9 h, la temperatura fue de 10 °C.

— A las 19 h (7 de la tarde), la temperatura fue de 20 °C.

Es una función que hace corresponder a cada instante una temperatura.



Una **función** relaciona **dos variables.** En general se designan por x e y:

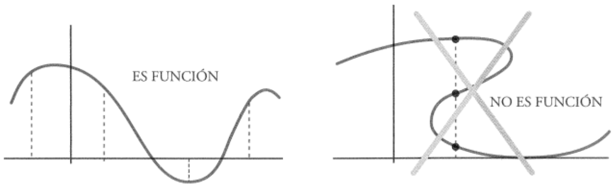
- x es la **variable independiente.**
- y es la **variable dependiente** (su valor depende del valor de x).

La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y.

Para apreciar con claridad el comportamiento de una función, esta se representa gráficamente sobre unos ejes cartesianos.

Ejercicio resuelto

Explicar por qué la gráfica de la izquierda es función y la de la derecha no lo es.



La primera gráfica es de una función porque a cada x le corresponde un único valor de y.

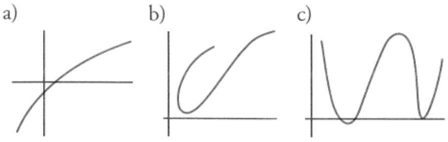
La segunda no lo es, porque a algunos valores de x les corresponden varios valores de y.

2. Actividades para **reforzar** el concepto de función así como su interpretación.

Actividades

1 Di cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones y cuáles no son funciones, justificando las respuestas:

a) b) c)



2 En la gráfica de arriba (temperatura a lo largo del día):

a) ¿Podemos decir que la mínima temperatura se dio a las 6 de la mañana? ¿Cuál fue?

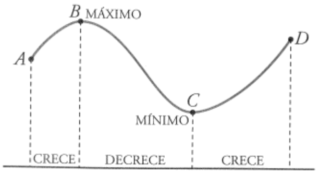
b) ¿A qué hora fue la máxima temperatura? ¿Cuál fue?

c) ¿En qué momentos del día la temperatura fue de 14 °C?

d) Durante 1 h, aproximadamente, el Sol estuvo oculto por las nubes. ¿A qué hora fue?

222

2 Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos



Las funciones se analizan y se describen de izquierda a derecha. Esta función es *creciente* desde A hasta B, porque los valores de la ordenada son cada vez mayores. Es *decreciente* de B a C porque los valores de la y son cada vez menores. Finalmente, vuelve a ser creciente en el tramo de C a D.

El valor *máximo* lo toma en el punto B, y el *mínimo,* en el C.

Una función es **creciente** en un tramo cuando al aumentar la x (es decir, al recorrerla de izquierda a derecha), aumenta la y.

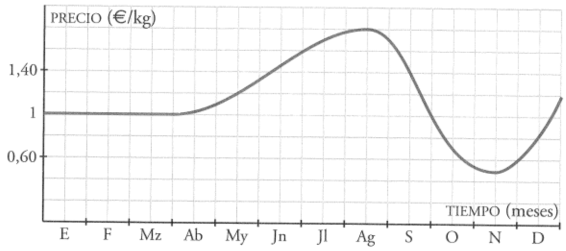
Es **decreciente** si, al aumentar la x, disminuye la y.

Si mantiene el mismo valor en todo un tramo, se dice que es **constante** en ese tramo.

El punto en el que la ordenada toma mayor valor se llama **máximo** de la función, y aquel en el que la ordenada toma el menor valor, **mínimo.**

Ejemplo

Veamos la evolución del **precio** de las naranjas de zumo a lo largo de un año en el mercado de una localidad productora:



- En el primer trimestre se mantiene estable **(constante).**
- Tiene un tramo **creciente** desde principios de abril hasta mediados de agosto, que es cuando alcanza su **máximo.**
- **Decrece** hasta mediados de noviembre, cuando llega a su **mínimo.**
- Vuelve a subir (crece) hasta final de año.

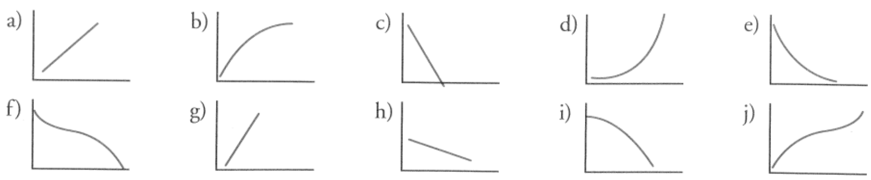
Evolución del precio

- E, F, Mz: **constante,** 1 €.
- 1.º de Ab hasta mediados de Ag: **crece** desde 1 € hasta 1,80 €.
- Mediados de Ag hasta mediados de N: **decrece** desde 1,80 € hasta 0,50 €.
- Mediados de N hasta final de año: **crece** desde 0,50 € hasta 1,20 €.

3. Actividades para **reforzar** los conceptos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función.

Actividades

1 Hay muchas formas de crecer y de decrecer. Observa las siguientes funciones. ¿Cuáles son crecientes? ¿Cuáles son decrecientes? (Todas ellas son una cosa u otra).



223

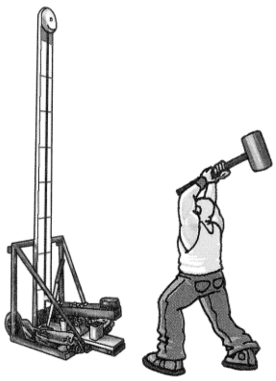
3 Funciones dadas por tablas de valores

Hay funciones de las que conocemos una serie de puntos que, normalmente, vienen dados en una tabla. Además, se suele conocer el argumento que liga a las dos variables. Con todo ello, podemos representar la gráfica de la función, aproximadamente, y razonar sobre ella.

Ejemplo 1

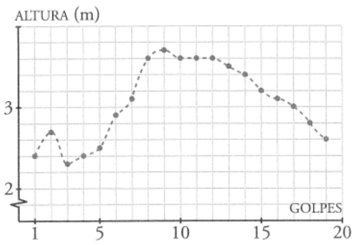
Un forzudo golpea con una maza un disco que, mediante un resorte, lanza hacia arriba una pesa que sube tanto más cuanto más fuerte sea el golpe. Da un golpe cada minuto. Observa los resultados:

GOLPES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
ALTURA	2,4	2,7	2,3	2,4	2,5	2,9	3,1	3,6	3,7	3,6	3,6	3,6	3,5	3,4	3,2	3,1	3	2,8	2,6



Tras los primeros golpes de tanteo, parece que llega a su nivel (3,6 m-3,7 m). Después, va aflojando; probablemente, debido al cansancio.

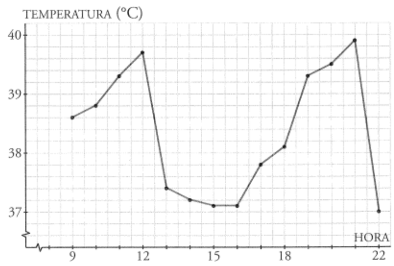
La función está formada solo por los puntos. La línea que los une sirve para apreciar mejor la evolución.



Ejemplo 2

A un enfermo se le toma la temperatura (en °C) cada hora desde las 9 de la mañana hasta las 10 de la noche. Estos son los resultados:

HORA	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
TEMP.	38,6	38,8	39,3	39,7	37,4	37,2	37,1	37,1	37,8	38,1	39,3	39,5	39,9	37



Entre cada dos tomas de temperatura, el paciente, como es natural, sigue teniendo una temperatura que desconocemos. Por eso, unimos los puntos de la forma más sencilla.

4. Actividades para **reforzar** la representación de funciones dadas mediante una tabla.

Actividades

1 Otro forzudo consigue las siguientes marcas en el artefacto descrito en el primer ejemplo. Represéntalas:

GOLPES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ALTURA	2,9	3,1	3	2,8	3,3	3,5	3,2	2,9	3,3	3,5

2 Representa la siguiente evolución de la temperatura (en °C) de un enfermo:

HORA	8	10	12	14	16	18	20	22	24
TEMP.	39,7	39,6	38,2	38,7	38,4	39,2	40	38,5	37,3

unidad 11

La tabla de valores como paso intermedio

ECUACIÓN
↓
TABLA DE VALORES
↓
REPRESENTACIÓN GRÁFICA

De una función conocemos la relación entre su abscisa, x, y su ordenada, y. Nos dicen que $y = 2x$. Para representarla, le damos valores a x y obtenemos los que le corresponden a y. Veamos:

$y = 2x$ si $x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 = 0$

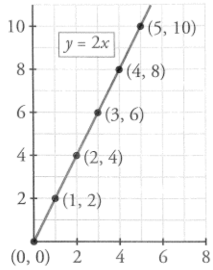
si $x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2$

si $x = 2 \rightarrow y = 2 \cdot 2 = 4$

...

Estos resultados, y otros, se resumen en una tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	4	6	8	10	12



Las funciones pueden venir dadas por tablas de valores por las cuales se conocen algunos de sus puntos.

Cuando existe una relación algebraica entre la x y la y de los puntos, a dicha relación se la llama **ecuación de la función.**

Conociendo la ecuación de una función se pueden obtener, a partir de ella, tantos puntos como se necesiten para representarla.

Ejercicio resuelto

Representar la función cuya ecuación es $y = x^2 - 4x + 4$, dando a x los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

$x = 0 \rightarrow y = 0 - 0 + 4 = 4$

$x = 1 \rightarrow y = 1 - 4 + 4 = 1$

$x = 2 \rightarrow y = 4 - 8 + 4 = 0$

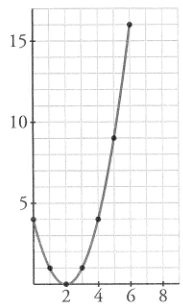
$x = 3 \rightarrow y = 9 - 12 + 4 = 1$

$x = 4 \rightarrow y = 16 - 16 + 4 = 4$

$x = 5 \rightarrow y = 25 - 20 + 4 = 9$

$x = 6 \rightarrow y = 36 - 24 + 4 = 16$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	4	1	0	1	4	9	16



5. Actividades para **reforzar** la representación de funciones definidas mediante una ecuación.

Actividades

3 Representa $y = \frac{x+2}{2}$ dando a x los valores 0, 2, 4, 6, 8, 10 y 12.

4 Representa $y = x + 4$ dando a x los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

5 Representa $y = x^2 - 6x + 3$ dando a x los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

6 Representa $y = x \cdot (10 - x)$ dando a x los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

225

6 Funciones lineales: $y = mx + n$

Nota

En matemáticas superiores se llaman **funciones lineales** a las del tipo $y = mx$.

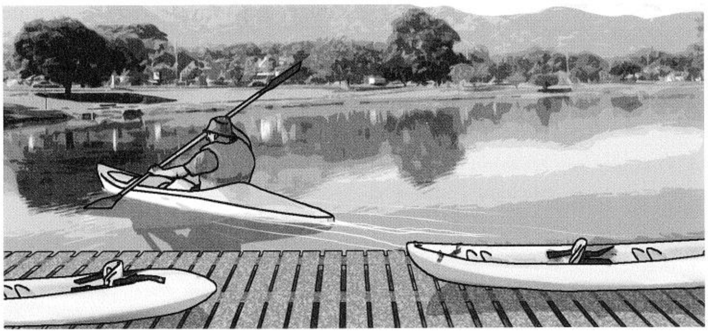
A estas otras, $y = mx + n$, se las llama **funciones afines.**

Sin embargo, en matemáticas aplicadas como, por ejemplo, en economía, se llaman lineales a las funciones que se representan mediante rectas.

Así lo hacemos aquí:

lineales $\rightarrow$ $y = mx + n$

de proporcionalidad $\rightarrow$ $y = mx$



El alquiler de una canoa cuesta 1 € cada hora. Pero, previamente, hemos de pagar 1,50 € para entrar en el recinto donde se encuentran. Por tanto, el coste de un paseo en canoa, en función del tiempo que estemos, es:

0 horas $\rightarrow$ 1,5 €

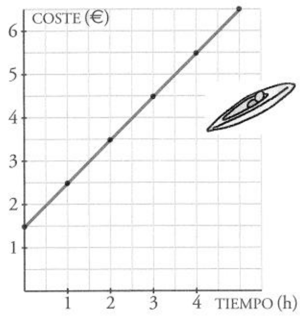
1 hora $\rightarrow$ $1{,}50 + 1 = 2{,}50$ €

2 horas $\rightarrow$ $1{,}50 + 2 \cdot 1 = 3{,}50$ €

3 horas $\rightarrow$ $1{,}50 + 3 \cdot 1 = 4{,}50$ €

4 horas $\rightarrow$ $1{,}50 + 4 \cdot 1 = 5{,}50$ €

5 horas $\rightarrow$ $1{,}50 + 5 \cdot 1 = 6{,}50$ €



TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…	x
COSTE (€)	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	…	$x + 1{,}5$

El coste se obtiene en función del tiempo mediante la ecuación $y = x + 1{,}5$.

Ten en cuenta

Cualquier recta tiene por ecuación $y = mx + n$.

Si $n = 0$, estamos en el caso de una función de proporcionalidad:

$$y = mx$$

8. Actividades para **reforzar** el concepto de función lineal.

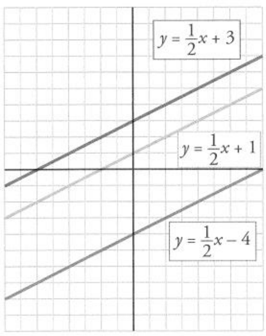
La ecuación $\boldsymbol{y = mx + n}$ se representa mediante una recta de **pendiente** m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

n se llama **ordenada en el origen.**

Dos ecuaciones con la misma pendiente se representan mediante rectas paralelas.

Las funciones $y = mx + n$ se llaman **funciones lineales.**

Cuando $n = 0$, se trata de una función de proporcionalidad, $y = mx$.



Ejercicios resueltos

1. Representar estas funciones:

a) $y = 2x - 5$

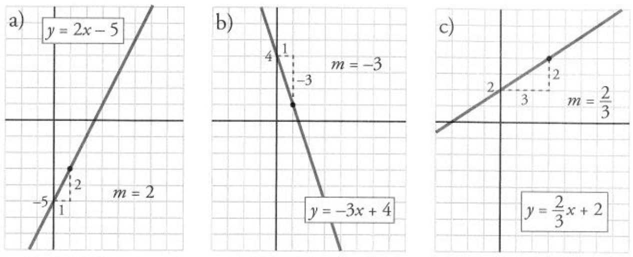
b) $y = -3x + 4$

c) $y = \frac{2}{3}x + 2$

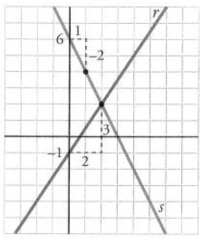
1. a) Para representar $y = 2x - 5$, nos fijamos en que $m = 2$ y $n = -5$. Po[r] tanto, dibujaremos una recta que pase por (0, –5) y cuya pendiente sea 2 (avanza 1, sube 2).

b) Procediendo de forma análoga al caso anterior, dibujaremos una recta qu[e] pase por (0, 4) y cuya pendiente sea –3 (avanza 1, baja 3).

c) La recta pasará por (0, 2) y su pendiente será $\frac{2}{3}$ (avanza 3, sube 2).



2. Deducir la ecuación de las dos rectas representadas.



2. Al ser rectas, la ecuación de ambas es $y = mx + n$.

- Ecuación de r:

  Pasa por (0, –1). Por tanto, $n = -1$.

  Cuando avanza 2, sube 3. Su pendiente es $m = \frac{3}{2}$.

  Su ecuación es: $y = \frac{3}{2}x - 1$.

- Ecuación de s:

  Pasa por (0, 6). Por tanto, $n = 6$.

  Cuando avanza 1, baja 2. Su pendiente es $m = \frac{-2}{1} = -2$.

  Su ecuación es: $y = -2x + 6$.

9. Actividades para **reforzar** la asociación entre funciones lineales y sus correspondientes representaciones gráficas.

Actividades

1 Representa las siguientes funciones:

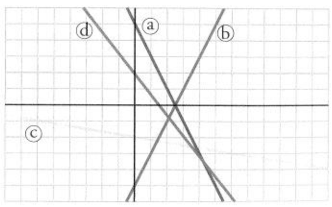
a) $y = -2x + 5$ b) $y = x - 3$

c) $y = \frac{2}{3}x - 4$ d) $y = \frac{3}{2}x + 4$

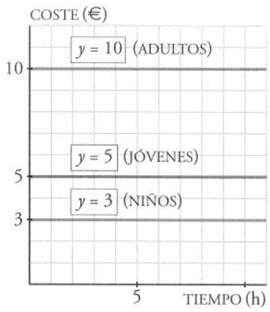
e) $y = -x - 1$ f) $y = x - 6$

g) $y = \frac{3}{5}x + 1$ h) $y = -\frac{5}{3}x + 1$

2 Escribe las ecuaciones de estas funciones:



7 Funciones constantes: $y = k$



El acceso a las pistas de patinaje sobre hielo vale 3 € para los niños, 5 € para los jóvenes y 10 € para los adultos. Una vez en las pistas, se puede estar tanto tiempo como se quiera.

JÓVENES:

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…
COSTE (€)	5	5	5	5	5	…

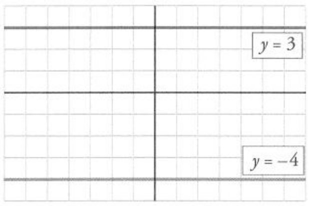
El coste, en función del tiempo, es $y = 5$ para los jóvenes.

Ten en cuenta

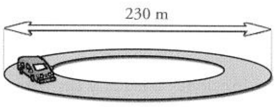
La función constante $y = k$ es una función lineal, $y = mx + n$, en la que $m = 0$.

La función **$y = k$**, en la que el valor de y no depende de x, se llama **función constante.**

Se representa por una recta paralela al eje X, a una distancia k de este.



Ejercicio resuelto



Un coche da vueltas alrededor de una pista circular con un diámetro de 230 m. Escribir la ecuación de la función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia del coche al centro de la pista.

La función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia del coche al centro de la pista es una función constante de ecuación $y = 115$.

Actividades

1 Representa las siguientes funciones:

a) $y = 7$ b) $y = -3$ c) $y = 0$

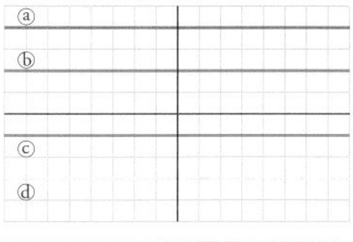
2 a) Representa la recta que pasa por estos puntos:

$A(-2, 3)$ $B(5, 3)$

b) Sin hacer ningún cálculo, ¿podrías dar la ecuación de la recta anterior?

c) ¿Cuál es la pendiente de dicha recta?

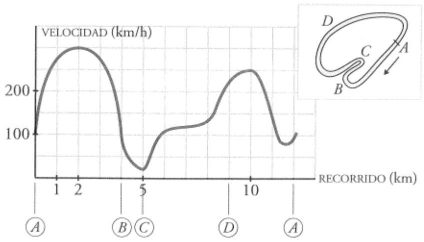
3 Escribe la ecuación de las siguientes funciones:



232

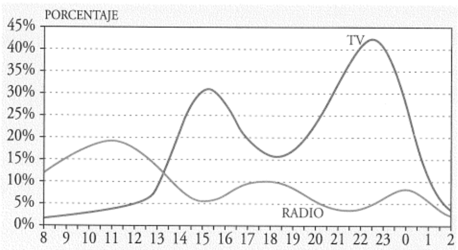
Ejercicios y problemas

8 La gráfica describe la velocidad de un bólido de carreras en cada lugar de este circuito:



Di en qué tramos la velocidad es creciente y en cuáles es decreciente. ¿A qué crees que se deben los aumentos y las disminuciones de velocidad? Señala el máximo y el mínimo de esta función.

9 Esta gráfica corresponde al porcentaje de personas que ven la televisión o escuchan la radio, en las distintas horas del día.



a) Describe la curva correspondiente a la televisión: dónde es creciente, dónde es decreciente, máximos, mínimos… Relaciónala con las actividades cotidianas: levantarse, acostarse, comida, cena…

b) Haz lo mismo con la curva correspondiente a la radio.

c) Compara las dos curvas y relaciónalas.

10 Represent las siguientes gráficas:

a) Altura de una pelota que está botando cada vez menos, hasta que se para.

b) La temperatura de un plato de sopa que se queda sobre la mesa, sin consumir.

c) La distancia a la Tierra de un satélite artificial que da vueltas y vueltas.

d) La altura a la que se encuentra el asiento de un columpio cuando se balancea.

Gráficas punto a punto

11 Representa las siguientes funciones dando a x, en cada caso, los valores que se indican:

a) $y = x^2 - 4x + 5$ $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

b) $y = \sqrt{x}$ $0, 1, 4, 9, 16$

c) $y = \sqrt{x-3}$ $3, 4, 7, 12, 19$

d) $y = (x-3)^2$ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

e) $y = 8x - x^2$ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

12 De una familia de rectángulos cuyo perímetro es 20 cm hemos medido su base y su área. Estos son los resultados:

BASE, en cm, x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ÁREA, en cm^2, y	9	16	21	24	25	24	21	16	9

a) Representa la función.

b) Comprueba que la ecuación de esta función es:

$$y = 10x - x^2$$

13 Se ha medido, mes a mes, la estatura de un niño desde que nace hasta que tiene un año. Estos son los resultados:

EDAD (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ESTATURA (cm)	54	58	62	64	67	69	71	72	74	75	77	78	80

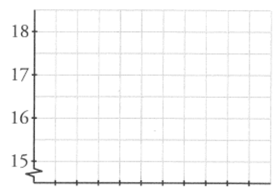
Representa los resultados en una gráfica.

14 Durante diez semanas seguidas, un lanzador de peso ha anotado su mejor marca obtenida durante sus entrenamientos.

La tabla de la derecha recoge los resultados logrados.

SEMANA	LANZ. (m)
1	15,18
2	15,91
3	16,33
4	16,52
5	18,40
6	16,62
7	16,90
8	17,44
9	16,40
10	17,00

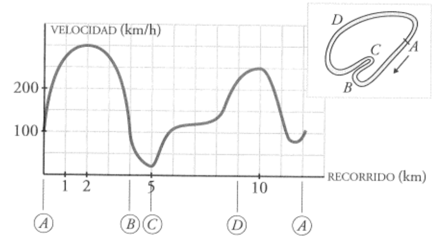
Representa la función en tu cuaderno.



234

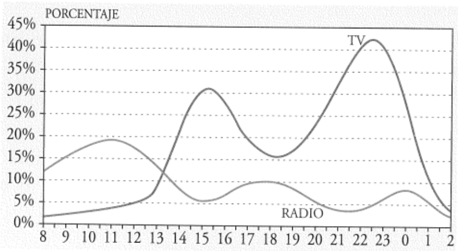
Ejercicios y problemas

8 ◻◻◻ La gráfica describe la velocidad de un bólido de carreras en cada lugar de este circuito:



Di en qué tramos la velocidad es creciente y en cuáles es decreciente. ¿A qué crees que se deben los aumentos y las disminuciones de velocidad? Señala el máximo y el mínimo de esta función.

9 ◻◻◻ Esta gráfica corresponde al porcentaje de personas que ven la televisión o escuchan la radio, en las distintas horas del día.



a) Describe la curva correspondiente a la televisión: dónde es creciente, dónde es decreciente, máximos, mínimos… Relaciónala con las actividades cotidianas: levantarse, acostarse, comida, cena…

b) Haz lo mismo con la curva correspondiente a la radio.

c) Compara las dos curvas y relaciónalas.

10 ◻◻◻ Representa las siguientes gráficas:

a) Altura de una pelota que está botando cada vez menos, hasta que se para.

b) La temperatura de un plato de sopa que se queda sobre la mesa, sin consumir.

c) La distancia a la Tierra de un satélite artificial que da vueltas y vueltas.

d) La altura a la que se encuentra el asiento de un columpio cuando se balancea.

Gráficas punto a punto

11 ◻◻◻ Representa las siguientes funciones dando a x, en cada caso, los valores que se indican:

a) $y = x^2 - 4x + 5$ — $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

b) $y = \sqrt{x}$ — $0, 1, 4, 9, 16$

c) $y = \sqrt{x-3}$ — $3, 4, 7, 12, 19$

d) $y = (x-3)^2$ — $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

e) $y = 8x - x^2$ — $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

12 ◻◻◻ De una familia de rectángulos cuyo perímetro es 20 cm hemos medido su base y su área. Estos son los resultados:

BASE, en cm, x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ÁREA, en cm², y	9	16	21	24	25	24	21	16	9

a) Representa la función.

b) Comprueba que la ecuación de esta función es:

$$y = 10x - x^2$$

13 ◻◻◻ Se ha medido, mes a mes, la estatura de un niño desde que nace hasta que tiene un año. Estos son los resultados:

EDAD (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ESTATURA (cm)	54	58	62	64	67	69	71	72	74	75	77	78	80

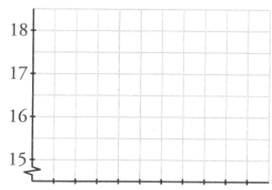
Representa los resultados en una gráfica.

14 ◻◻◻ Durante diez semanas seguidas, un lanzador de peso ha anotado su mejor marca obtenida durante sus entrenamientos.

La tabla de la derecha recoge los resultados logrados.

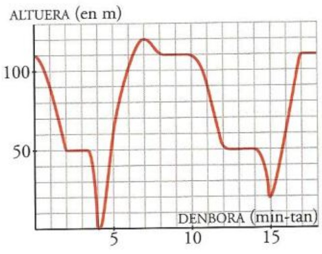
SEMANA	LANZ. (m)
1	15,18
2	15,91
3	16,33
4	16,52
5	18,40
6	16,62
7	16,90
8	17,44
9	16,40
10	17,00

Representa la función en tu cuaderno.



- **Libro de texto de 3º ESO**

1 Funtzioak eta grafikoak



denbora (t) $\rightarrow$ *altuera* (a)

Naturalista talde batek arrano baten mugimenduei erreparatu die:

Habiatik irten, untxi bat harrapatu, habiara itzuli, berriro irten, uso bat harrapatu, eta berriro habiara itzuli da.

Marraztu duten grafikoa arreta handiz aztertzen badugu, gauza asko jakingo ditugu: habia zer altueratan dagoen, zer altueratan egiten duen hegaz arranoak, harrapakinak ikusteko, noiz harrapatu duen harrapakinetako bakoitza…

BI ALDAGI, BI ARDATZ

Arranoaren hegaldia deskribatzen duen grafikoak bi aldagai erlazionatzen ditu: behaketa hasi zenetik igaro den denbora, t, eta arranoa zer altueratan dagoen, a.

Adierazpena diagrama cartesiar batean egin da:

- **Ardatz horizontalean,** denbora, t.
- **Ardatz bertikalean,** arranoa zer altueratan dagoen, a.

Grafikoko puntu bakoitzak *denbora* bat eta *altuera* bat adierazten ditu, eta une horretan arranoa altuera horretan dagoela esan nahi du.

Grafikoa aztertuta, arranoak hegaldian egin dituen gorabeherak ikusten ditugu, eta nahiko zehatz deskriba ditzakegu.

ESKALAK

Ardatz bakoitzean **eskala** bat dago:

- Ardatz horizontalean, karratu batek 1 minutu adierazten du.
- Ardatz bertikalean, karratu batek 10 metro adierazten ditu.

Ardatzetako eskalek jokabidea era kualitatiboan deskribatzen digute, eta, horrez gain, kuantifikatu egiten dute. Adibidez: behaketan zehar arranoak hartu duen altuerarik handiena 120 m da, eta hegaz egiten hasi eta 7 minutura hartu du.

Ez ahaztu

Deskribapen kualitatiboan aldagai bat bestearekiko nola aldatzen den aztertzen da.

Deskribapen kuantitatiboan aldagaiak zenbat aldatzen diren zehaztu ahal da.

DEFINIZIO EREMUA

Grafiko honek 0-18 zatia hartzen du. Denbora tarte horretan baino ez daukagu arranoaren jokabideari buruzko informazioa. 0-18 tartea funtzioaren **definizio-eremua** dela esaten da.

Ariketak

1 Aurreko grafikoa kontuan hartuta, erantzun:

a) Zer altueratan dago habia?

b) Zer altueratan egon da arranoa, begira hasi direnetik bost minutura?

c) Zer altueratatik ikusi ditu arranoak harrapakinak?

d) Zer unetan harrapatu du untxia?

e) Zenbat denbora egin du habian bikotekidearekin eta txitekin, untxia harrapatu eta gero?

f) Zer altueratan egon da harrapatu duen usoa?

g) Usoa harrapatu duenetik, zenbat denbora behar izan du, habiaraino igotzeko? Kalkulatu igoerako abiadura, minutuko metrotan.

2 Deskribatu zikoina baten 10 minutuko hegaldia ardatz cartesiarretan, elizako kanpandorrean daukan habiatik irteten denetik, igel bat harrapatu eta berriro itzultzen den arte.

144

Definizioak

Funtzio bat orokorrean x eta y esango diegun bi aldagairen arteko erlazioa da.

- x **aldagai askea** da (aurreko adibidean, denbora).
- y **menpeko aldagaia** da (aurreko adibidean, altuera).
- Funtzioak y-ren balio bakarra **lotzen dio** x-ren balio bakoitzari. y, x-ren **funtzioa** dela esaten da.

Funtzioek fenomeno fisikoak, ekonomikoak, biologikoak, soziologikoak deskribatzeko balio dute, edo, besterik gabe, erlazio matematikoak adierazteko.

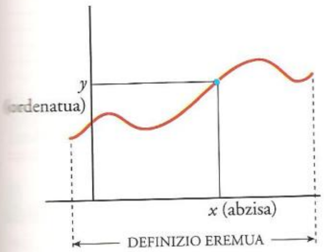
— Higikari batek *denbora* igaro ahala *egiten duen bidea.*

— Airearen *tenperatura, altuera* aldatu ahala.

— Karratu baten *azalera, aldearen luzera* aldatu ahala.

ADIERAZPEN GRAFIKOA

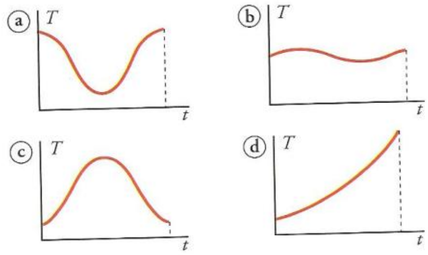
Funtzio baten jokaera ikusteko, grafikoan adieraziko dugu:



- **Ardatz cartesiarretan** bi aldagaiak adieraziko ditugu:
  — x ardatz horizontalean (**abcisa**-ardatzean).
  — y ardatz bertikalean (**ordenatu**-ardatzean).
- Grafikoko puntu bakoitzak bi **koordenatu** ditu, bere x abzisa eta bere y ordenatua.
- x-ren balioetarako y-ren balioak dauden eremua funtzioaren **definizio-eremua** da.
- Ardatzak eskala jakin batzuen arabera graduatuta egon behar dute, bi aldagaien balioak kuantifikatzeko.

Ariketak

1 Honako lau grafiko hauek lau hiritako eguneko tenperatura maximoa (T) adierazten dute, denboran (t), **urte jakin batean:**



a) Ezkerreko lau grafiko horiek aztertu ondoren, esan zer hiritan duen gorabeherarik txikienak tenperaturak.

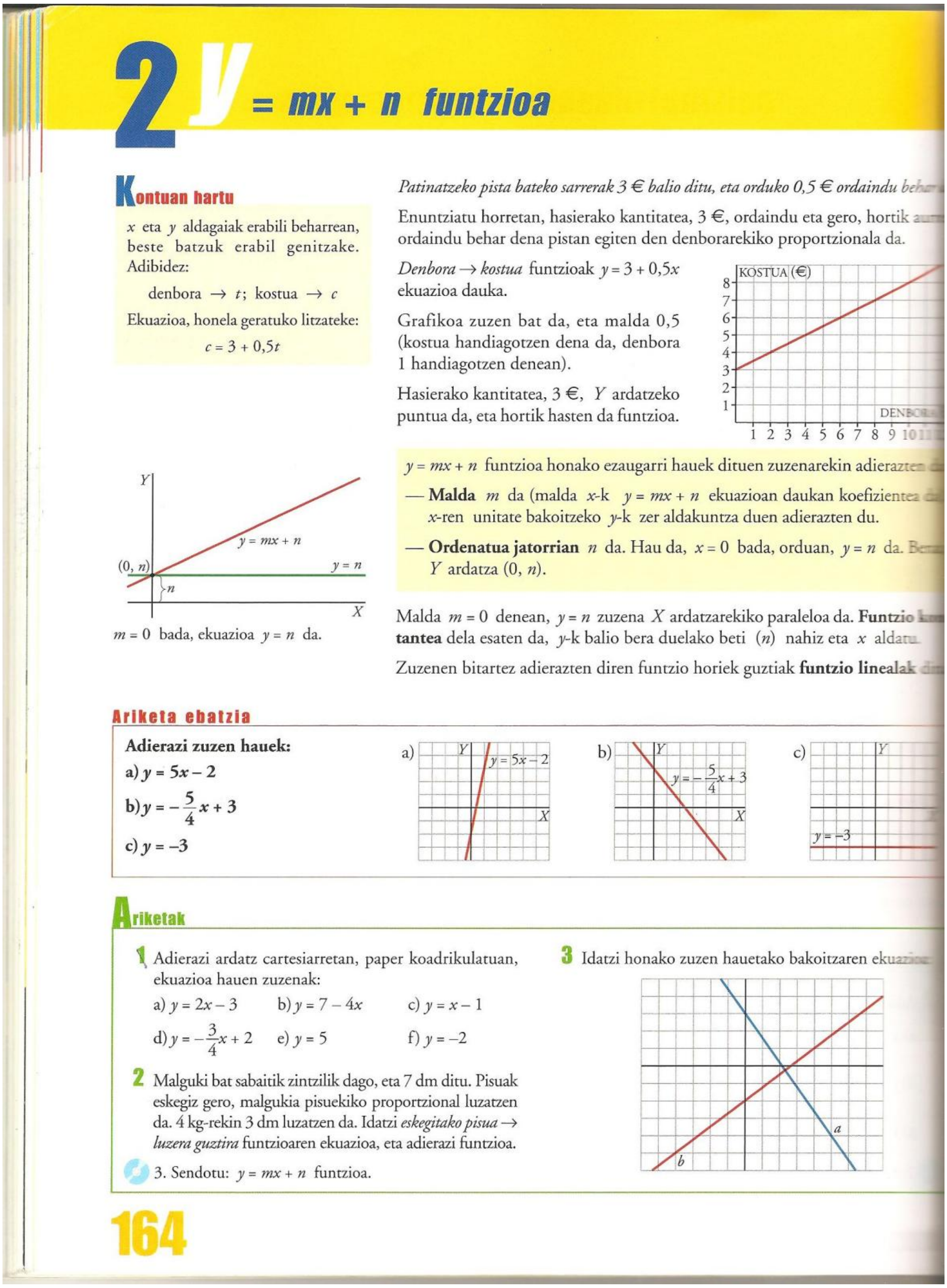
b) Grafikoetako bat gure inguruko hiri batena izan daiteke, eta beste bat, gure antipodako hiri batena.

Zer grafikori buruz ari gara? Arrazoitu zure erantzuna.

c) Lau grafikoetako batek ez dauka zentzurik. Esan zein den eta zergatik.

d) Aukeratu aldagai bakoitzerako eskala egoki bat eta graduatu ardatzetako bakoitza.

2. Sendotu: funtzioak eta funtzioen grafikoen interpretazioa.



2 $y = mx + n$ funtzioa

Kontuan hartu

x eta y aldagaiak erabili beharrean, beste batzuk erabil genitzake. Adibidez:

denbora $\rightarrow t$; kostua $\rightarrow c$

Ekuazioa, honela geratuko litzateke:

$c = 3 + 0{,}5t$

Patinatzeko pista bateko sarrerak 3 € balio ditu, eta orduko 0,5 € ordaindu beh

Enuntziatu horretan, hasierako kantitatea, 3 €, ordaindu eta gero, hortik a ordaindu behar dena pistan egiten den denborarekiko proportzionala da.

Denbora $\rightarrow$ *kostua* funtzioak $y = 3 + 0{,}5x$ ekuazioa dauka.

Grafikoa zuzen bat da, eta malda 0,5 (kostua handiagotzen dena da, denbora 1 handiagotzen denean).

Hasierako kantitatea, 3 €, Y ardatzeko puntua da, eta hortik hasten da funtzioa.

$m = 0$ bada, ekuazioa $y = n$ da.

$y = mx + n$ funtzioa honako ezaugarri hauek dituen zuzenarekin adierazt

— **Malda** m da (malda x-k $y = mx + n$ ekuazioan daukan koefizient x-ren unitate bakoitzeko y-k zer aldakuntza duen adierazten du.

— **Ordenatua jatorrian** n da. Hau da, $x = 0$ bada, orduan, $y = n$ da. Y ardatza $(0, n)$.

Malda $m = 0$ denean, $y = n$ zuzena X ardatzarekiko paraleloa da. **Funtzio** **tantea** dela esaten da, y-k balio bera duelako beti (n) nahiz eta x alda

Zuzenen bitartez adierazten diren funtzio horiek guztiak **funtzio linealak**

Ariketa ebatzia

Adierazi zuzen hauek:

a) $y = 5x - 2$

b) $y = -\frac{5}{4}x + 3$

c) $y = -3$

Ariketak

1 Adierazi ardatz cartesiarretan, paper koadrikulatuan, ekuazioa hauen zuzenak:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = 7 - 4x$ c) $y = x - 1$

d) $y = -\frac{3}{4}x + 2$ e) $y = 5$ f) $y = -2$

2 Malguki bat sabaitik zintzilik dago, eta 7 dm ditu. Pisuak eskegiz gero, malgukia pisuekiko proportzional luzatzen da. 4 kg-rekin 3 dm luzatzen da. Idatzi *eskegitako pisua* $\rightarrow$ *luzera guztira* funtzioaren ekuazioa, eta adierazi funtzioa.

3. Sendotu: $y = mx + n$ funtzioa.

3 Idatzi honako zuzen hauetako bakoitzaren eku

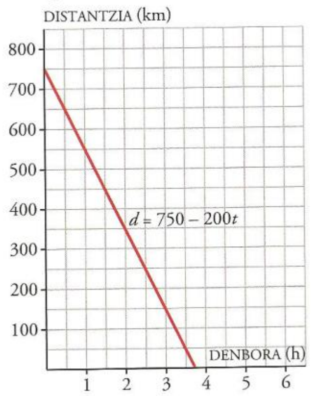
164

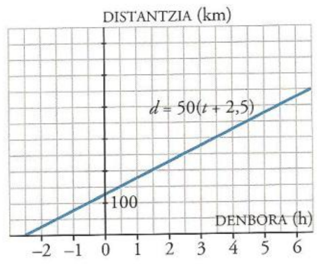
6 Funtzio linealaren erabilerak

Gogoan izan

Eguneroko egoeretatik ateratzen ditugun funtzioetan zenbaki handiak edo txikiak erabili behar izaten ditugu. Horrelakoetan, adierazpen grafikoa zentzuzkoa izan dadin, koordenatu-ardatzetan eskala egokiak aukeratzea komeni da.

7. Ardatzetan eskalak aukeratzeko laguntza.





Funtzio linealek, ikusi dugunez, modu proportzionalean aldatzen diren bi mag-
tude erlazionatzen dituzten hainbat fenomeno deskribatzeko balio dute.

Adibidez: *jateko baten bolumena → jateko horren balioa*

substantzia baten bolumena → substantzia horren pisua

higidura uniformearen denbora → egindako distantzia

Horiek guztiak zuzenen bitartez adierazten dira, eta zuzen horietan magnitude
bestearekiko nola aldatzen den ikusten da.

Problema ebatziak

1. Abiadura handiko tren bat gure herritik 750 km-ra dagoen hiri ba-tik irten da oraintsu, eta 200 km/h-ko abiaduran dator honantz. Ze distantziatara egongo da gugandik hemendik t ordura?

Trenak t orduan egiten duen espazioa $200t$ da. Beraz, gugandik tren
egongo den distantzia kantitate horretan laburtuko da:

$$d = 750 - 200t$$

Igarotako denbora eta trena gugandik zer distantziatara dagoen lo
dituen funtzioaren ekuazioa da hori.

(Alboko adierazpen grafikoan, Y ardatzean honako eskala hau hartu d
1 laukitxo = 50 km).

2. Merkantzia-tren bat orain dela bi ordu eta erdi irten da gure herri eta 50 km/h-ko abiadura darama. Idatzi gugandik zer distantzi dagoen eta oraindik aurrera igarotzen den denbora lotzen dituen ek-zioa.

t ordu barru, trenak $t + 2{,}5$ bidaia-ordu izango ditu eginda. Beraz, egind
distantzia (gugandik zer distantziatara dagoen) hau da: $d = 50(t + 2{,}5)$

Grafikoan, (–2,5; 0) puntuak adierazten du orain dela bi ordu eta erdi
gugandik 0 km-ra zegoela.

Ariketak

1 Interneteko GUAITOKI zerbitzariak GUAI tarifa dauka: hilean 20 €-ko kuota finkoa eta 0,01 € minutuko. Kalkulatu zenbat den G gastua, Internet erabiltzen den t minutuen funtzioan, eta adierazi *erabilitako denbora → gastua* funtzioa.

2 Interneteko JOMEIL zerbitzariak kuota finkorik ez da
TXATXI tarifa dauka. Aukera honetan, minutuko
ordaindu behar da, besterik ez. Kalkulatu zenbatekoa de
gastua, Internet erabiltzen den t denboraren funtzio
adierazi grafiko batean *erabilitako denbora → gastua*

168

Ariketak eta problemak

TREBATU

Bi zuzen adierazi

1 Adierazi honako zuzen hauek:

a) $y = 4x$ b) $y = -3x$ c) $y = -\frac{x}{2}$ d) $y = -4$

2 Adierazi zuzen hauek:

a) $y = 0{,}6x$ b) $y = \frac{1}{2}x$ c) $y = -2{,}4x$ d) $y = -\frac{2}{5}x$

3 Adierazi honako zuzen hauek, eskala egokia aukeratuz:

a) $y = 15x$ b) $y = -25x$

c) $y = \frac{x}{200}$ d) $y = -\frac{1}{120}x$

4 Adierazi honako zuzen hauek:

a) $y = -2x + 1$ b) $y = -\frac{x}{2} + 3$ c) $y = -\frac{8}{5}$

d) $y = \frac{3x-5}{2}$ e) $y = 2{,}5x - 1$ f) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

5 Ariketa ebatzia

Adierazi $3x - 2y + 4 = 0$ zuzena.

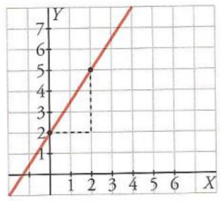
1. ebazpena

y bakanduko dugu ekuazioan: $y = \frac{3}{2}x + 2$

Zuzeneko bi puntu kalkulatuko ditugu:

x	0	2
y	2	5

Koordenatu-ardatzetan adieraziko ditugu, eta zuzena marratuko dugu:



2. ebazpena

Malda $\frac{3}{2}$ denez (x-ren koefizientea y bakanduta dagoenean), eta ordenatua jatorrian 2 denez, horrek (0, 2) puntua ematen digu, eta 2 unitate egiten ditugu eskuinera, eta 3 gora.

6 Adierazi honako zuzen hauek:

a) $x + y = 5$ b) $2x - y = -3$

c) $2x - 3y = 12$ d) $3x + 2y = -6$

e) $4x + 9y = 0$ f) $4x - 5y + 20 = 0$

7 Adierazi, ardatz berdinetan, kasu bako... emandako bi zuzenak, eta aurkitu zer puntutan e... tzen duten elkar:

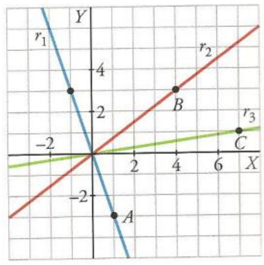
a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ y = -x + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -4x + 1 \\ y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 1 - 3(x+2) \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

Zuzenen ekuazioak

8 Ariketa ebatzia

Kalkulatu maldak eta idatzi honako zuzen ... ekuazioak:



Ikusten duzunez, r_1, r_2 eta r_3 proportzio... funtzioei dagozkie, koordenatuen jatorritik ig... diren zuzenak dira eta.

- r_1-en malda: A puntuaren koordenatuak (1, −3) dira; beraz, $m = \frac{-3}{1} = -3$.

Proportzionaltasun-funtzio baten ekuazioak $y = mx$ forma hartzen du.

- r_1-en ekuazioa: $y = -3x$

Kalkulatu zenbatekoa den r_2 eta r_3-ren malda, ... idatzi ekuazioa.

9 Aurkitu zein den koordenatuen jatorriti... puntutik igarotzen den zuzenaren ekuazioa, ... kasu hauetako bakoitzean:

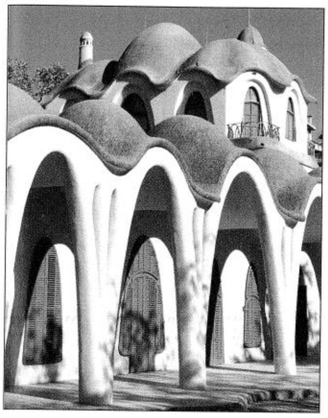
a) $P(12, -3)$ b) $P\left(-2, \frac{3}{4}\right)$

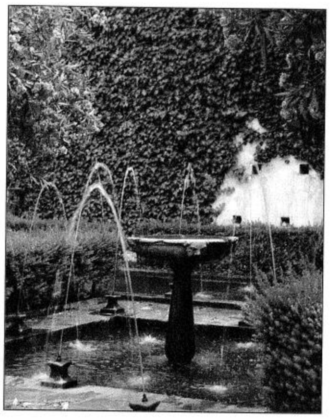
c) $P(-7, -21)$ d) $P(30, 63)$

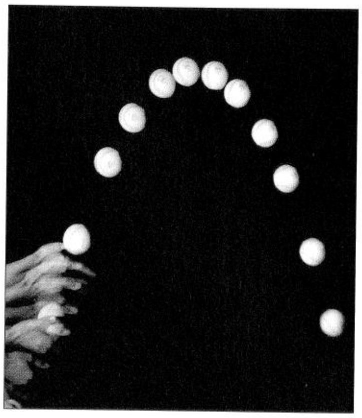
170

- **Libro de texto de 4º ESO (Modalidad A)**

1 Parábolas y funciones cuadráticas







La curva que describe un balón cuando se lanza a canasta es una parábola. También describen parábolas las bolas de golf o los chorros de agua. Parabólicas son las secciones de las antenas que captan las emisiones de televisión procedentes de los satélites artificiales y las secciones de los faros de los coches. Y otros muchos objetos presentes en nuestra vida.

También hay muchas funciones que se representan mediante parábolas:

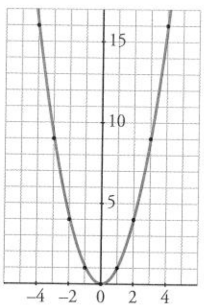
— El área de un cuadrado en función de su lado $(A = l^2)$ o la de un círculo en función de su radio $(A = \pi r^2)$.

— La altura a la que se encuentra una piedra que lanzamos hacia arriba en función del tiempo transcurrido desde que se lanzó $(a = v_0 t - 4{,}9t^2)$.

— El espacio que recorre un coche desde que decidimos frenar hasta que realmente se para, en función de la velocidad que llevaba $(e = 0{,}0074v^2 + 0{,}2v)$.

— …

Parábola tipo: la función $y = x^2$



Empecemos por representar el modelo de parábola más sencillo, que corresponde a la función $y = x^2$.

Se trata de una curva **simétrica** respecto al eje Y; tiene un mínimo en el punto (0, 0), al que llamamos **vértice.**

Tiene **dos ramas,** una decreciente y otra creciente.

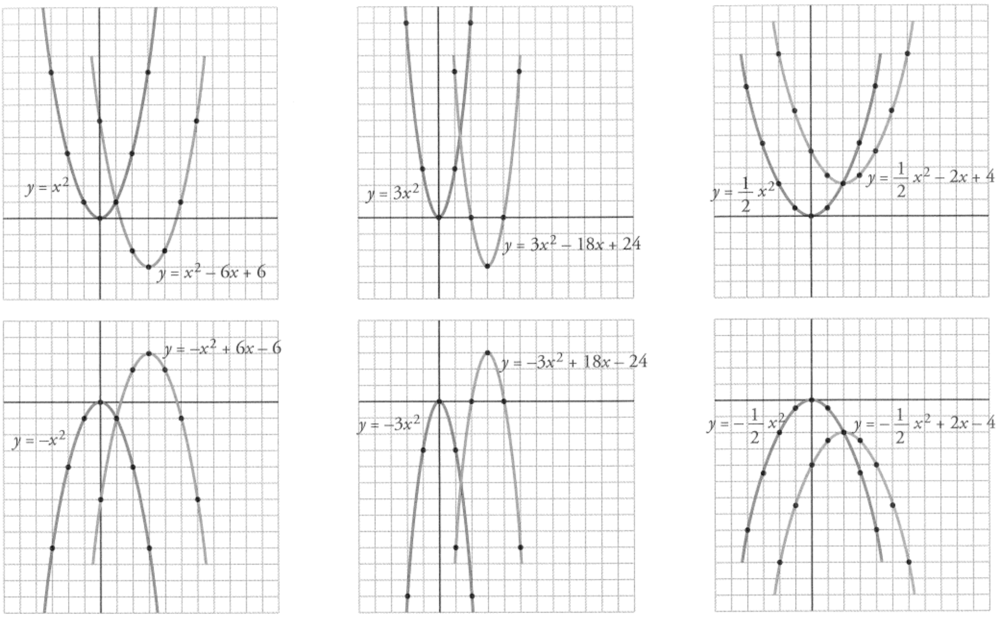
Es una función **definida en todo** $\mathbb{R}$ y **continua,** pues no presenta saltos: se puede representar de un solo trazo.

Como veremos a continuación, las gráficas de todas las demás funciones cuadráticas son similares a esta.

TABLA DE VALORES	
x	y
–4	16
–3	9
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

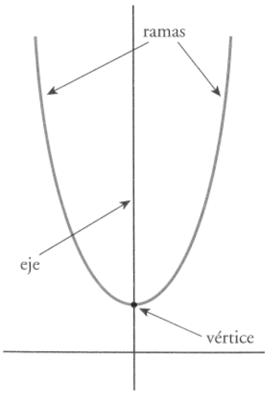
Funciones cuadráticas

Observa las siguientes curvas con sus respectivas ecuaciones:



Puedes comprobar, en cada una de ellas, que las coordenadas de los puntos señalados cumplen las correspondientes ecuaciones.

Observándolas, se pueden extraer las conclusiones que se remarcan en las líneas siguientes:



Las funciones $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, llamadas **cuadráticas,** se representan todas ellas mediante **parábolas** y son continuas en todo $\mathbb{R}$.

Cada una de estas parábolas tiene un eje paralelo al eje Y.

Su forma (hacia abajo, hacia arriba, más ancha…) depende de a, coeficiente de x^2, del siguiente modo:

- Si dos funciones cuadráticas tienen el mismo coeficiente de x^2, las parábolas correspondientes son idénticas, aunque pueden estar situadas en posiciones distintas.
- Si $a > 0$, tienen las ramas hacia arriba, y si $a < 0$, hacia abajo.
- Cuanto mayor sea $|a|$, más estilizada es la parábola.

Representación de funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas se representan mediante parábolas y la forma de estas depende, exclusivamente, del coeficiente de x^2. Veamos algunos pasos que conviene dar para la representación de $y = ax^2 + bx + c$:

1.º La **abscisa del vértice** es $p = -\dfrac{b}{2a}$ (véase el ejercicio 39).

2.º **Obtención de algunos puntos próximos al vértice.**

Calcularemos el valor de la función en abscisas enteras próximas al vértice, a su derecha y a su izquierda. Así se obtiene la curva en su parte más interesante.

3.º **Puntos de corte con los ejes.**

Con ellos se completa la formación sobre los puntos más relevantes de la gráfica.

— Corte con el eje X: se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

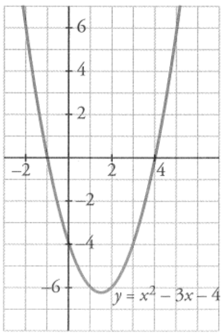
— Corte con el eje Y: es el $(0, c)$.

4.º **Representación.**

Escogeremos sobre los ejes unas escalas que nos permitan plasmar la información en un espacio razonable.

Ejercicio resuelto

Representar $y = x^2 - 3x - 4$.



1.º Obtención del vértice:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Abscisa: } p = \dfrac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \\ \text{Ordenada: } f(1{,}5) = -6{,}25 \end{array}\right\} \text{El vértice es } (1{,}5; -6{,}25).$$

2.º Obtención de puntos próximos al vértice:

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	6	0	–4	–6	–6	–4	0	6

3.º Puntos de corte con los ejes:

- Cortes con el eje X:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$$

- Corte con el eje Y: $(0, -4)$

(Esta información ya la teníamos en la tabla anterior)

4.º Puedes ver la representación en el margen.

Actividades

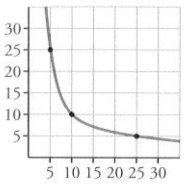
1 Represente las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^2 - 6x + 5$

2 Dibuja estas funciones:

a) $y = \dfrac{1}{4}x^2 + x - 2$ b) $y = 2x^2 - 10x + 8$

2 Funciones de proporcionalidad inversa

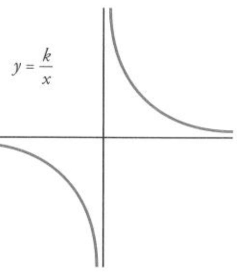


De un rectángulo de 100 cm^2 de superficie, desconocemos sus lados. Los llamamos x e y. Es claro que $xy = 100$. Lo ponemos así:

$y = \frac{100}{x}$ (A igualdad de áreas, los lados son inversamente proporcionales).

Las relaciones de proporcionalidad inversa, como la que acabamos de describir, se presentan con mucha frecuencia en la naturaleza, la física, la economía... Vamos a analizarlas teóricamente.

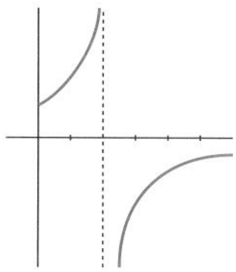
Características de las funciones $y = k/x$



- No están definidas en $x = 0$.
- Si x se acerca a 0, y toma valores cada vez más grandes. Por eso decimos que el eje Y es una **asíntota.**
- Si x toma valores cada vez más grandes, y se acerca a 0. Por eso el eje X es asíntota.

Esta curva es una **hipérbola.**

Otras funciones de esta familia: $y = k/(x - a)$



En la unidad anterior, vimos la función $A = \frac{2}{2-d}$ que relaciona el aumento, A, producido por una lupa con la distancia, d, a la que se colocaba el objeto.

La gráfica de esta función es también una hipérbola. Sus asíntotas son el eje de abscisas y la recta $d = 2$.

En general, las funciones $y = \frac{k}{x-a}$ se representan mediante hipérbolas cuyas asíntotas son el eje X y la recta $x = a$, paralela al eje Y.

Actividades

1 Representa con detalle la parte positiva de la función $y = \frac{36}{x}$. Para ello, dale a x los valores 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36 y utiliza una hoja de papel cuadriculado para representar los puntos obtenidos.

2 Representa, completa, la función $y = \frac{6}{x}$. Da a x los valores ±1, ±2, ±3 y ±6.

3 Representa $y = \frac{8}{x-5}$ dando a x los valores –3, 1, 3, 4, 6, 7, 9 y 13.

4 Representa $y = \frac{12}{x+2}$ dando a x los valores –14, –8, –6, –5, –4, –3, –1, 0, 1, 2, 4 y 10.

5 Representa $y = \frac{-12}{x+2}$.

158

Ejercicios y problemas

PRACTICA

Funciones cuadráticas

1 Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 4$

c) $y = 2x^2$ d) $y = 0{,}5x^2$

2 Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = (x + 4)^2$ b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

c) $y = -3x^2 + 6x - 3$ d) $y = -x^2 + 5$

3 Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de estas parábolas señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo:

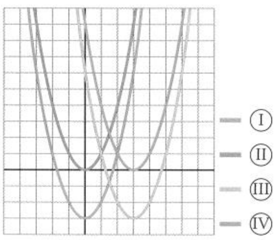
a) $y = x^2 - 5$ b) $y = 3 - x^2$

c) $y = -2x^2 - 4x + 6$ d) $y = 3x^2 - 6x$

e) $y = x^2 + 4x + 4$ f) $y = -5x^2 + 10x - 3$

4 Representa cada una de las parábolas del ejercicio anterior.

5 Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:



a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$

Otras funciones

6 Dibuja la gráfica de estas funciones, dando a x los valores que se indican en cada caso:

a) $y = \frac{3}{x}$ $x = -3; -1; -1/2; 1/2; 1; 3$

b) $y = -\frac{3}{x}$ $x = -3; -1; -1/2; 1/2; 1; 3$

c) $y = \frac{5}{x}$ $x = -5; -1; -1/2; 1/2; 1; 5$

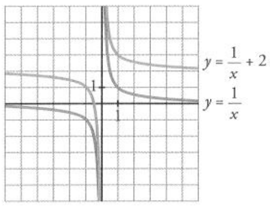
d) $y = -\frac{2}{x}$ $x = -2; -1; -1/2; 1/2; 1; 2$

7 Halla las asíntotas de cada una de estas funciones hiperbólicas y represéntalas gráficamente ayudándote de una tabla de valores:

a) $y = \frac{3}{x + 3}$ b) $y = \frac{-3}{x + 1}$

c) $y = \frac{5}{1 - x}$ d) $y = \frac{-7}{x - 1}$

8 Observa estas hipérbolas y contesta:



a) ¿A qué valor se acerca cada una cuando x toma valores cada vez más grandes?

b) ¿A qué valores se acerca cada una cuando x toma valores cada vez más próximos a cero?

c) ¿Cuál es la asíntota horizontal de cada función?

d) Dibuja la gráfica de $y = \frac{1}{x + 2}$. ¿Cuáles son sus asíntotas?

9 Halla las asíntotas de cada una de estas hipérbolas y represéntalas gráficamente:

a) $y = \frac{-5}{x}$ b) $y = \frac{5}{x}$

c) $y = \frac{-5}{x - 2}$ d) $y = \frac{-5}{x} - 2$

e) $y = \frac{5}{x} + 2$ f) $y = \frac{-5}{x - 2} - 2$

B. Encuestas de la denominación de la función de proporcionalidad inversa.

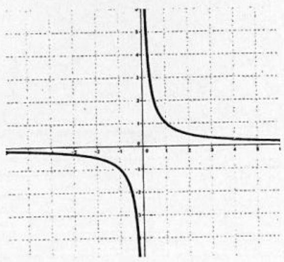
(1)

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

Ez

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ______________________________

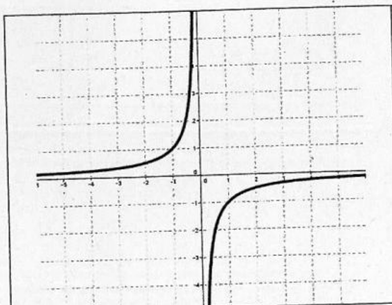
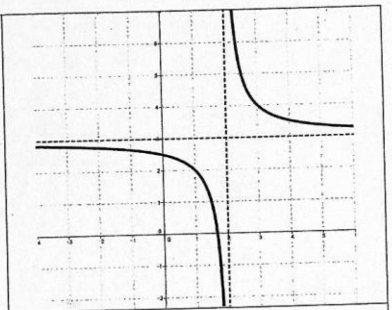
2. Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:



Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ______________________________

3. Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?

	
hiperbola	hiperbola.

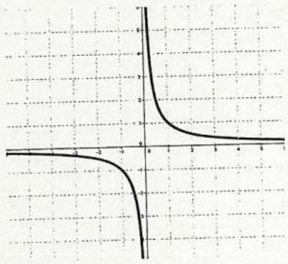
2

$\frac{x-a}{x-b}$

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ARRAZIONALA .

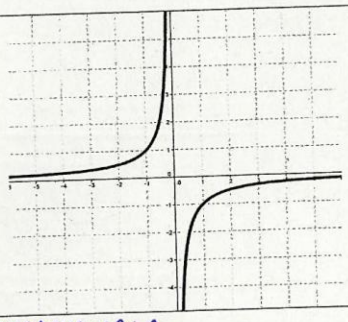
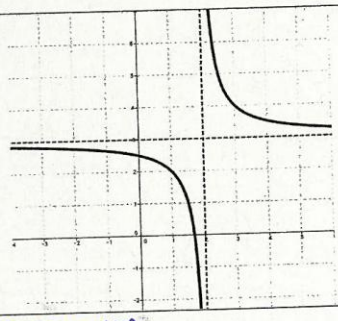
2. Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:



Izena aldatuko zenioke?

~~a) Ez~~
b) Bai, “hiperbola” deituko nuke.
c) Bai, “alderantzizko funtzioa” deituko nuke.
d) Bai, “zenbakizko alderantzizko funtzioa” deituko nuke.
e) Bai, “alderantzizko proportzionaltasun funtzioa” deituko nuke.
f) Bai, “funtzio arrazionalaren kasu berezia” dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ______

3. Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?

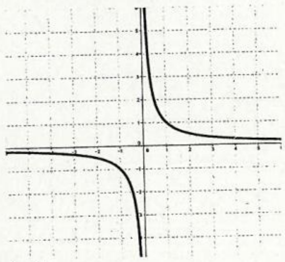
	
ARRAZIONALA .	ARRAZIONALA

3

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ______________________________

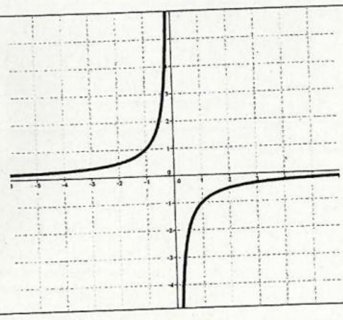
2. Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:

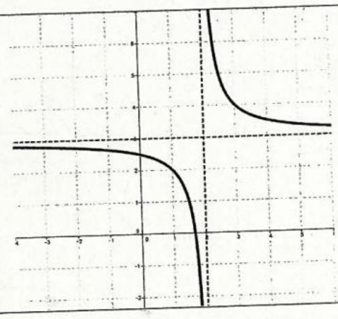


Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ______________________________

3. Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?





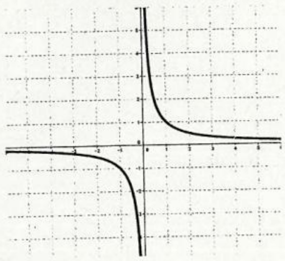
alderantzizko funtzioak

4

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ______________________________

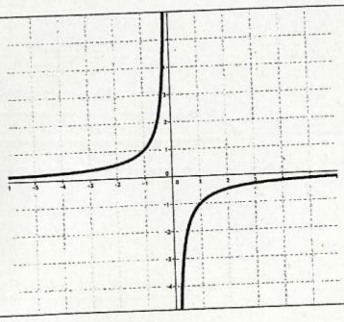
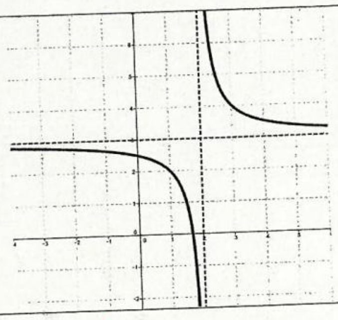
2. **Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:**

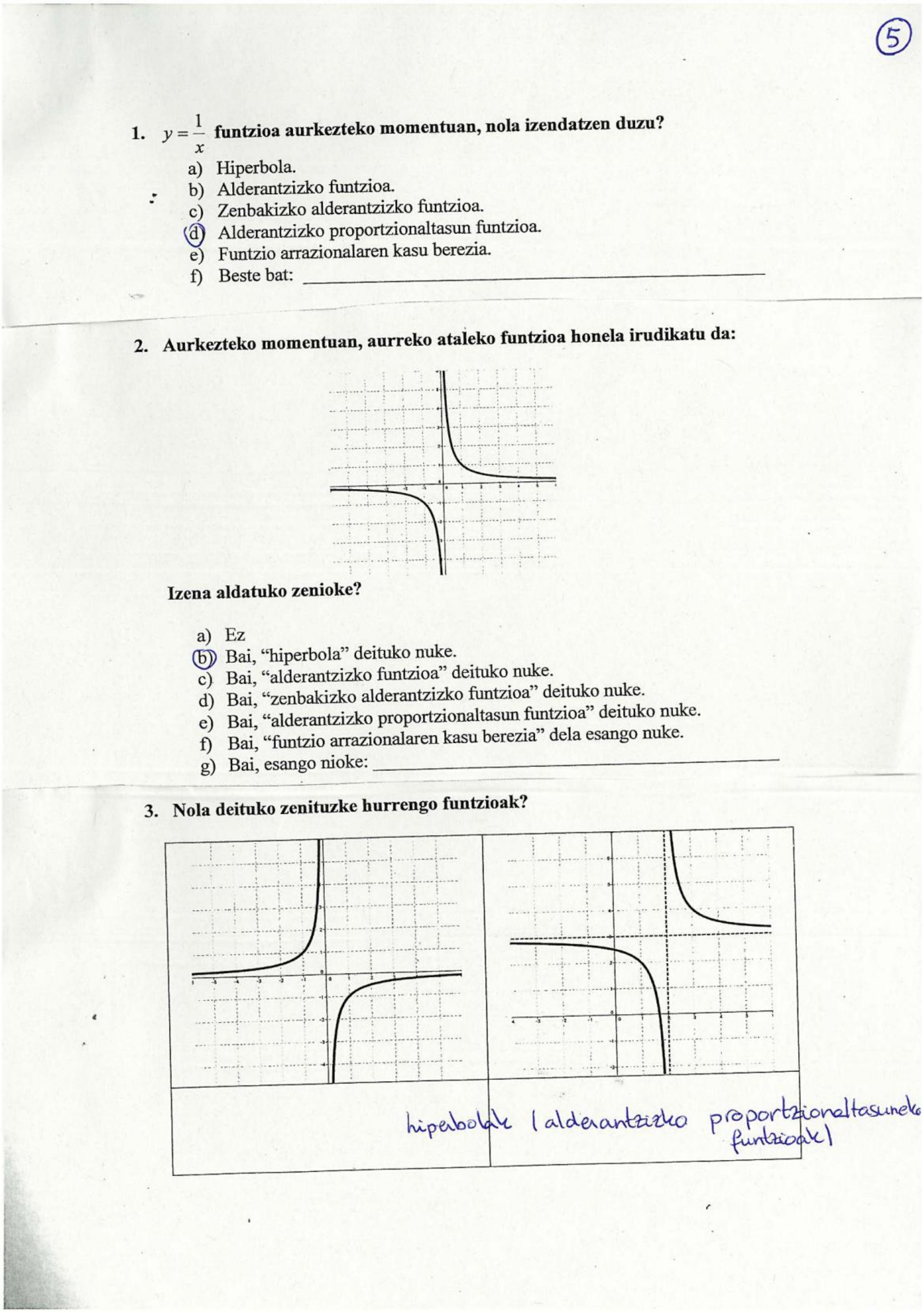


Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ______________________________

3. **Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?**

	
HIPERBOLA	HIPERBOLA



5

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**
   a) Hiperbola.
   b) Alderantzizko funtzioa.
   c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
   d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
   e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
   f) Beste bat: ______________________

2. **Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:**

Izena aldatuko zenioke?

   a) Ez
   b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
   c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
   d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
   e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
   f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
   g) Bai, esango nioke: ______________________

3. **Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?**

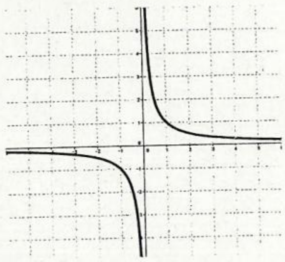
hiperbolak (alderantzizko proportzionaltasuneko funtzioak)

6

1. $y = \dfrac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ______________________________

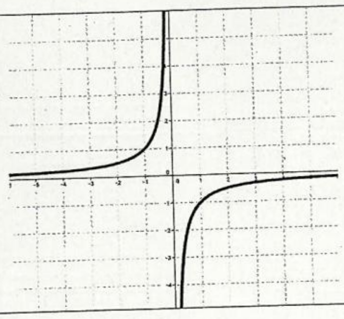
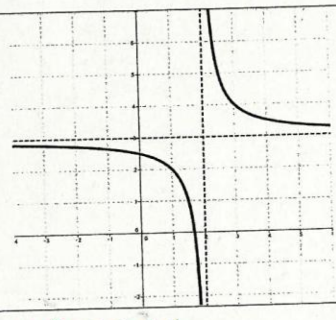
2. Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:



Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ______________________________

3. Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?

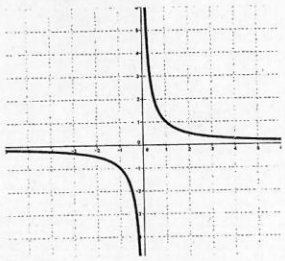
	
HIPERBOLA	HIPERBOLA

7

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ______________________________

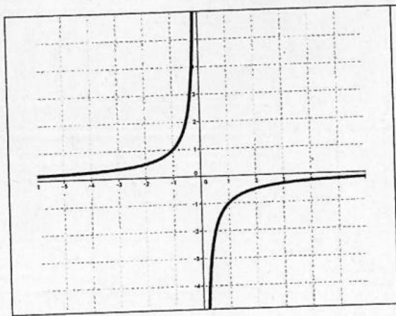
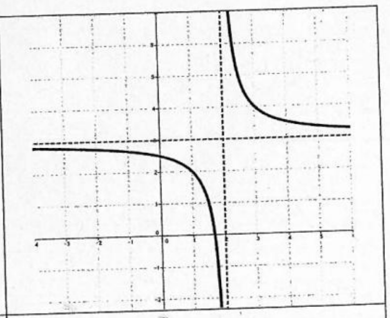
2. **Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:**



Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ______________________________

3. **Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?**

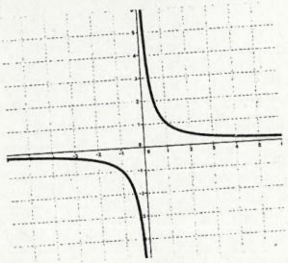
	
hiperbola	hiperbola

8

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa. X
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ______________________________

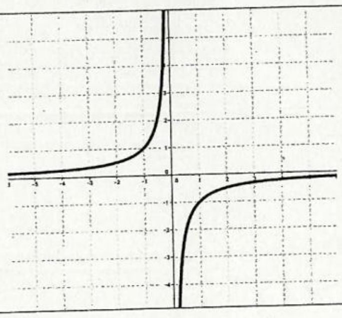
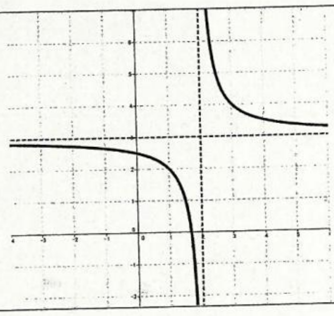
2. Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:



Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke. X
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ______________________________

3. Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?

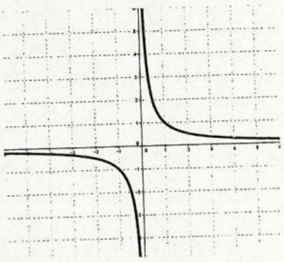
	
alderantzizko funtzioa	Hiperbola

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ____________________

9

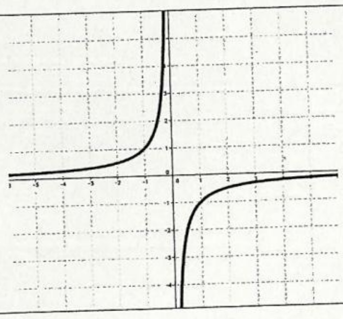
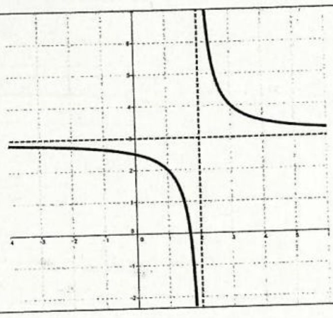
2. Aurkezteko momentuan, aurreko atalleko funtzioa honela irudikatu da:



Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ____________________

3. Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?

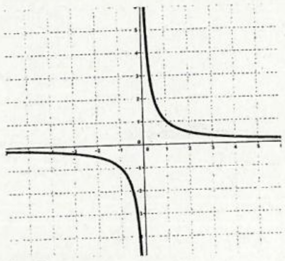
	
HIPERBOLA	HIPERBOLA

10

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ____________________

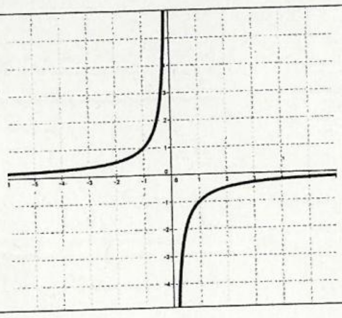
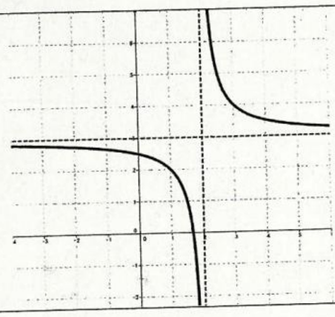
2. **Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:**



Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ____________________

3. **Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?**

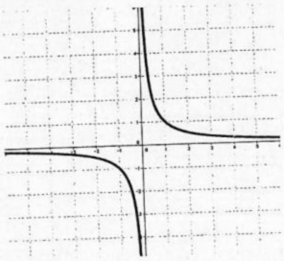
	
Hiperbola	Hiperbole

(11)

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ____________________

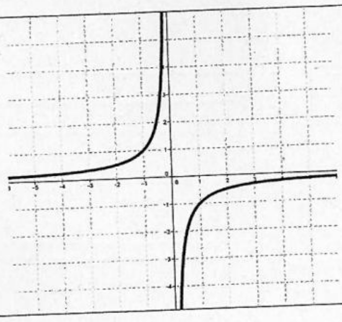
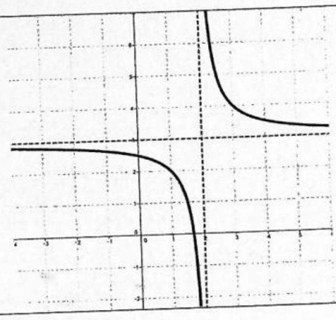
2. Aurkezteko momentuan, aurreko atalеko funtzioa honela irudikatu da:



Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ____________________

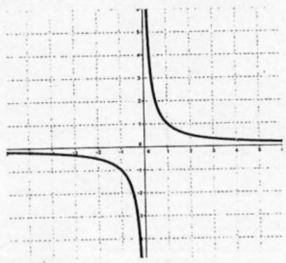
3. Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?

	
hiperbola	hiperbola

12

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**
   a) Hiperbola.
   b) Alderantzizko funtzioa.
   c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
   d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
   e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
   f) Beste bat: ____________________

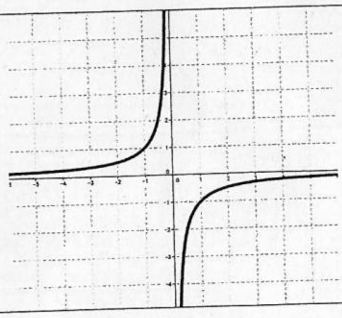
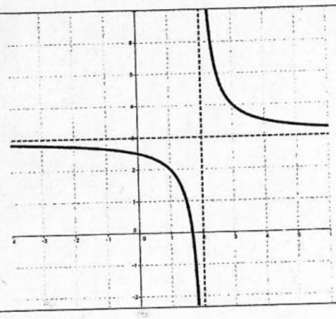
2. **Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:**



Izena aldatuko zenioke?

   a) Ez
   b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
   c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
   d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
   e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
   f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
   g) Bai, esango nioke: ____________________

3. **Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?**

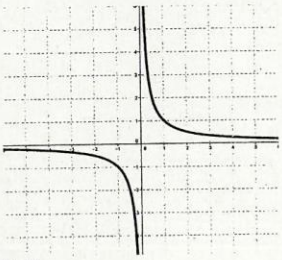
	
Hiperbola	Hiperbola

(13)

1. $y = \frac{1}{x}$ **funtzioa aurkezteko momentuan, nola izendatzen duzu?**

a) Hiperbola.
b) Alderantzizko funtzioa.
c) Zenbakizko alderantzizko funtzioa.
d) Alderantzizko proportzionaltasun funtzioa.
e) Funtzio arrazionalaren kasu berezia.
f) Beste bat: ______________________

2. **Aurkezteko momentuan, aurreko ataleko funtzioa honela irudikatu da:**

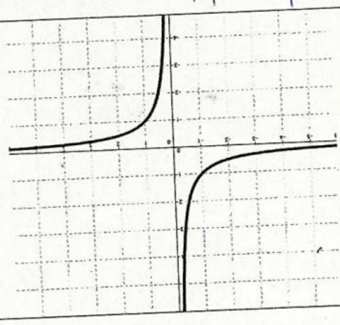


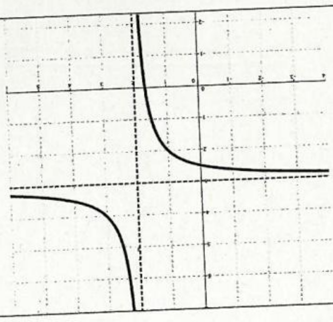
Izena aldatuko zenioke?

a) Ez
b) Bai, "hiperbola" deituko nuke.
c) Bai, "alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
d) Bai, "zenbakizko alderantzizko funtzioa" deituko nuke.
e) Bai, "alderantzizko proportzionaltasun funtzioa" deituko nuke.
f) Bai, "funtzio arrazionalaren kasu berezia" dela esango nuke.
g) Bai, esango nioke: ______________________

3. **Nola deituko zenituzke hurrengo funtzioak?**

hiperbola
Alderantzizko funtzioa
Funtzio arrazionala



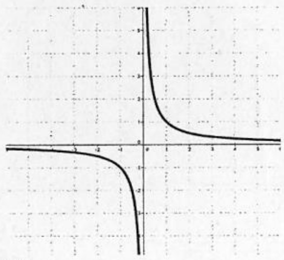


14

1. **En el momento de la introducción de la función $y = \frac{1}{x}$, ¿cómo la denominas?**

   a) Hipérbola.
   b) Función inversa.
   c) Función inversa numérica.
   d) Función de proporción inversa.
   e) Caso particular de función racional.
   f) Otra: ____________________

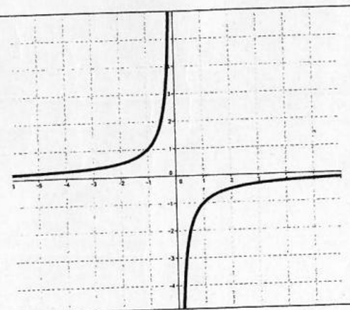
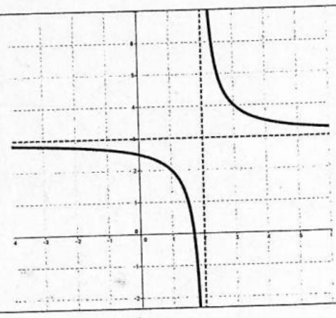
2. **En el momento de introducción la función anterior aparece representada por:**



¿Cambias su denominación?

   a) No.
   b) Sí, la denomino "hipérbola".
   c) Sí, la denomino "función inversa".
   d) Sí, la denomino "función inversa numérica".
   e) Sí, la denomino "función de proporción inversa".
   f) Sí, digo que es un caso particular de "función racional".
   g) Sí, la denomino: ____________________

3. **¿Cómo denominarías a las siguientes funciones?**

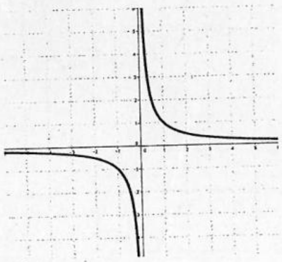
	
Hipérbola	Hipérbola

15

1. En el momento de la introducción de la función $y = \frac{1}{x}$, ¿cómo la denominas?

a) Hipérbola.
b) Función inversa.
c) Función inversa numérica.
d) Función de proporción inversa.
e) Caso particular de función racional.
f) Otra: ____________________

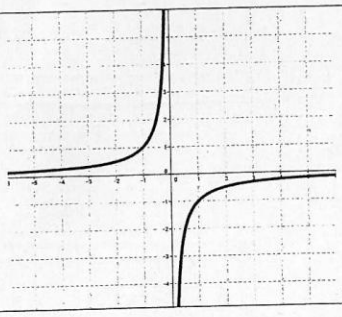
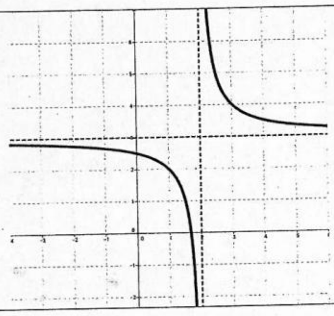
2. En el momento de introducción la función anterior aparece representada por:



¿Cambias su denominación?

a) No.
b) Sí, la denomino "hipérbola".
c) Sí, la denomino "función inversa".
d) Sí, la denomino "función inversa numérica".
e) Sí, la denomino "función de proporción inversa".
f) Sí, digo que es un caso particular de "función racional".
g) Sí, la denomino: ____________________

3. ¿Cómo denominarías a las siguientes funciones?

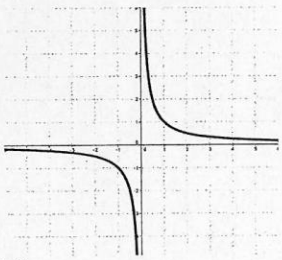
	
Hipérbola	Hipérbola

16

1. En el momento de la introducción de la función $y = \frac{1}{x}$, ¿cómo la denominas?

a) Hipérbola.
b) Función inversa.
c) Función inversa numérica.
d) Función de proporción inversa.
e) Caso particular de función racional.
f) Otra: ______

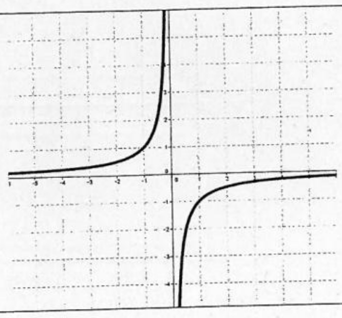
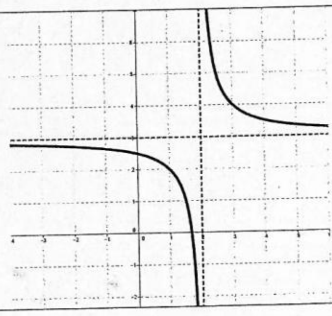
2. En el momento de introducción la función anterior aparece representada por:



¿Cambias su denominación?

a) No.
b) Sí, la denomino “hipérbola”.
c) Sí, la denomino “función inversa”.
d) Sí, la denomino “función inversa numérica”.
e) Sí, la denomino “función de proporción inversa”.
f) Sí, digo que es un caso particular de “función racional”.
g) Sí, la denomino: ______

3. ¿Cómo denominarías a las siguientes funciones?

	
Hipérbola	Hipérbola.